

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE LORENA – EEL/USP**

JOÃO RICARDO JOHNSON

**SIMULAÇÃO DA ESTABILIDADE DE UM SISTEMA DE CONTROLE EM UM
TANQUE DE AQUECIMENTO COM AGITAÇÃO SOB AÇÃO PID**

**Lorena – SP
2021**

JOÃO RICARDO JOHNSON

**SIMULAÇÃO DA ESTABILIDADE DE UM SISTEMA DE CONTROLE EM UM
TANQUE DE AQUECIMENTO COM AGITAÇÃO SOB AÇÃO PID**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Escola de Engenharia de Lorena da Universidade de São Paulo como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro Químico.

Área de Concentração: Controle de Processos Químicos

Orientador: Prof. Dr. Luiz Carlos de Queiroz

Lorena – SP

2021

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Automatizado
da Escola de Engenharia de Lorena,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Johnson, João Ricardo
Simulação da estabilidade de um sistema de
controle em um tanque de aquecimento com agitação sob
ação PID / João Ricardo Johnson; orientador Luiz
Carlos de Queiroz. - Lorena, 2021.
63 p.

Monografia apresentada como requisito parcial
para a conclusão de Graduação do Curso de Engenharia
Química - Escola de Engenharia de Lorena da
Universidade de São Paulo. 2021

1. Estabilidade. 2. Controlador proporcional
integral-derivativo. 3. Tanque de aquecimento com
agitação. I. Título. II. de Queiroz, Luiz Carlos,
orient.

AGRADECIMENTOS

À minha mãe Cleusa Sgarioni, que não mediu esforços para que eu, hoje, pudesse realizar o sonho de ser um engenheiro graduado pela Universidade de São Paulo.

Ao professor doutor Luiz Carlos de Queiroz, pela compreensão, paciência e orientações necessárias para a elaboração da monografia.

À Escola de Engenharia de Lorena por ter me proporcionado um imensurável crescimento pessoal e profissional.

RESUMO

JOHNSON, J. R. **Simulação da estabilidade de um sistema de controle em um tanque de aquecimento com agitação sob ação PID.** 2021. 63 f. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Engenharia Química) – Escola de Engenharia de Lorena, Universidade de São Paulo, Lorena, 2021.

O controle de processos é essencial ao projeto de uma planta química por compensar eventuais desvios das variáveis de processo que devem se manter em valores especificados. A fim de argumentar sobre o caráter imprescindível do controle, esta monografia apresentou como exemplo de processo um tanque de aquecimento com agitação contínua. O produto na saída corre o risco de não garantir uma composição uniforme ao se decompor em altas temperaturas ou se tornar uma mistura incompleta, em baixas temperaturas. Por isso, é essencial que esse processo tenha uma malha de controle de temperatura. O tanque é alimentado com um fluido que, agitado sob certa temperatura, a propriedade pretendida pelo projeto é alcançada. O processo é controlado por um controlador proporcional-integral-derivativo (PID), cuja variável controlada é a temperatura de saída. Essa deve ser mantida em um valor desejado de projeto (*set point*). Uma perturbação ocorre na temperatura de entrada e, de acordo com o que ocorre na saída medida constantemente, o controlador direciona sua tomada de decisão à válvula de injeção de vapor a fim de minimizar o desvio na resposta. O ponto crítico do ganho proporcional K_c foi calculado com o objetivo de analisar a estabilidade do sistema para três diferentes valores de K_c . Um menor que o ponto crítico, um exatamente no ponto crítico e um maior que o ponto crítico. Pelo método analítico de Routh obteve-se o valor crítico de 5,8426. Pelos métodos numéricos desenvolvidos no software *MATLAB (Matrix Laboratory)*, como o Método Newton-Raphson com divisões sintéticas e o Método de Bisseção, o valor obtido se encontrou entre 5,841932 e 5,841942. Os outros ajustes escolhidos foram 3 e 10. Por meio de gráficos gerados no software, foi visualizada a influência do ganho proporcional na estabilidade e os possíveis comportamentos dinâmicos da resposta às perturbações impulso e degrau. Deste modo, foi constatado que, dentre as três condições de estabilidade simuladas, o controle PID teve melhor desempenho quando $K_c = 3$.

Palavras-chave: Estabilidade. Controlador proporcional-integral-derivativo. Tanque de Aquecimento com Agitação.

ABSTRACT

JOHNSON, J. R. **Stability simulation of a three-mode feedback control system in a stirred-tank heater.** 2021. 63 p. Monography (Term Paper in Chemical Engineering) – Escola de Engenharia de Lorena, Universidade de São Paulo, Lorena, 2021.

Process control is essential to the design of a chemical plant as it compensates for any deviations from process variables that must remain at specified values. In order to argue about the essential nature of control, this monography presented as an example of a process a continuous stirred-tank heater. The product at the exit runs the risk of not guaranteeing a uniform composition when decomposing at high temperatures or becoming an incomplete mixture at low temperatures. Therefore, it is essential that this process has a temperature control loop. The tank is fed with a fluid which, when stirred at a certain temperature, the property intended by the design is achieved. The process is controlled by a proportional-integral-derivative (PID) controller, whose controlled variable is the outlet temperature. This must be kept at a desired design value (set point). A disturbance occurs in the inlet temperature and, according to what happens in the constantly measured outlet, the controller directs its decision making to the steam injection valve in order to minimize the deviation in the response. The critical point of the K_c proportional gain was calculated in order to analyze the stability of the system for three different values of K_c . One lower than the critical point, one exactly at the critical point, and one greater than the critical point. By the analytical method of Routh, the critical value of 5.8426 was obtained. By the numerical methods developed in the MATLAB software (Matrix Laboratory), such as the Newton-Raphson Method with synthetic divisions and the Bisection Method, the obtained value was found between 5.841932 and 5.841942. The other settings chosen were 3 and 10. Through graphics generated in the software, the influence of the proportional gain on stability and the possible dynamic behaviors of the response to impulse and step disturbances were visualized. Thus, it was found that, among the three simulated stability conditions, the PID control performed better when $K_c = 3$.

Keywords: Stability. Three-mode controller. Stirred-tank heater.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Resposta do nível de líquido ao longo do tempo com diferentes ganhos proporcionais.....	14
Figura 2.2 – Resposta do nível de líquido ao longo do tempo com controladores PI e P.....	15
Figura 2.3 – Resposta do controlador PI a uma variação em degrau no erro.....	16
Figura 2.4 – Sistema estável ou auto-regulatório.....	19
Figura 2.5 – Sistema instável.....	19
Figura 2.6 – Função degrau unitário.....	20
Figura 2.7 – Função impulso unitário.....	20
Figura 2.8 – Plano s (região estável à esquerda e região instável à direita)	24
Figura 3.1 – Tanque de aquecimento sob agitação contínua.....	27
Figura 3.2 – Diagrama de blocos para um sistema de controle simples.....	28
Figura 3.3 – Diagrama de blocos de um sistema de realimentação em malha fechada.....	32
Figura 3.4 – Análise gráfica do Método Newton-Raphson.....	38
Figura 3.5 – Descrição gráfica das três primeiras iterações para pesquisa de raízes pelo Método da Bisseção.....	40
Figura 4.1 – Resultado do algoritmo programado para pesquisar o valor crítico de Kc.....	47
Figura 4.2 – Gráfico da resposta ao impulso para $K_c = 3$	51
Figura 4.3 – Gráfico da resposta ao degrau para $K_c = 3$	51
Figura 4.4 – Gráfico da resposta ao impulso para K_c crítico = 5,8426.....	53
Figura 4.5 – Gráfico da resposta ao degrau para K_c crítico = 5,8426.....	53
Figura 4.6 – Gráfico da resposta ao impulso para $K_c = 10$	54
Figura 4.7 – Gráfico da resposta ao degrau para $K_c = 10$	54

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Arranjo de Routh.....	25
Tabela 3.1 – Arranjo de Routh Aplicado	35
Tabela 4.1 – Saídas da função <i>Residue</i> para diferentes Kc sob perturbação impulso.....	48
Tabela 4.2 – Saídas da função <i>Residue</i> para diferentes Kc sob perturbação degrau.....	49

LISTA DE SIGLAS

FT	função de transferência
Kc	ganho proporcional do controlador
<i>MATLAB</i>	<i>Matrix Laboratory</i>
P	Proporcional
PI	Proporcional-Integral
PID	Proporcional-Integral-Derivativo
TL	transformada de Laplace
TLI	transformada de Laplace inversa
USP	Universidade de São Paulo

LISTA DE SÍMBOLOS

$c(t)$	sinal de saída do controlador em certo tempo
c_s	bias ou sinal de saída do controlador no regime estacionário inicial
K_c	ganho proporcional do controlador
$e(t)$	erro em certo tempo
$C(t)$	variável-desvio do sinal de saída do controlador
$E(t)$	variável-desvio do erro
s	variável da transformada de Laplace (TL)
$G_c(s)$	função de transferência (FT) do controlador
τ_i	tempo integral
$C(s)$	TL de $C(t)$
$E(s)$	TL de $E(t)$
τ_d	tempo derivativo
$G_p(s)$	FT do processo
$G_f(s)$	FT do elemento de controle final
$G_m(s)$	FT do sensor-transmissor
$Y_{sp}(s)$	TL do sinal de set point
$G_d(s)$	FT do distúrbio na carga
$d(s)$	TL do distúrbio na carga
p_n	polos de uma FT
b_n	coeficientes das frações parciais de uma FT
$Y(s)$	TL da resposta para um distúrbio
$y(t)$	função temporal proveniente da transformada inversa (TLI) de $Y(s)$
a_n	coeficientes da equação característica
q	fluxo térmico proveniente do vapor da válvula de controle
q_s	fluxo térmico q no regime estacionário
w	vazão mássica da alimentação de um tanque
C	calor específico do fluido de alimentação
T_i	temperatura de entrada do fluido
T_{is}	temperatura de entrada no regime estacionário
T_0	temperatura de referência (<i>set point</i>)
T	temperatura de saída do fluido

T_s	temperatura de saída no regime estacionário
ρ	densidade do fluido de alimentação
V	volume do tanque alimentado
T'_i	variável-desvio da temperatura de entrada
T'	variável desvio da temperatura de saída
$T'_{i(s)}$	TL de T'_i
$T'(s)$	TL de T'
Q	variável-desvio do calor de aquecimento
$Q(s)$	TL de Q
τ_p	constante de tempo de primeira ordem do processo
K_P	ganho estático de primeira ordem do processo
$T'_{m(s)}$	TL da variável-desvio da temperatura medida
K_m	constante de primeira ordem do elemento de medida
τ_m	constante de tempo de primeira ordem do elemento de medida
$P(s)$	sinal de saída do controlador na forma de pressão
K_v	constante de primeira ordem da válvula
τ_v	constante de tempo de primeira ordem da válvula
K	parâmetro desconhecido da equação característica
x_n	estimativa inicial da raiz para o método de Newton-Raphson
x_{n+1}	resultado da primeira iteração do método de Newton-Raphson
$f(x_n)$	valor da função para x_n
$f'(x_n)$	derivada de $f(x_n)$
$N(s)$	numerador de uma FT
$D(s)$	denominador de uma FT
p	polo de uma FT
z	zero de uma FT
$N'(s)$	derivada do numerador de uma FT
$D'(s)$	derivada do denominador de uma FT
$\delta(t)$	função impulso unitário
$1(t)$	função degrau unitário
$\mathcal{L}[f(t)]$	TL de uma função

LETRAS GREGAS

- α parte real de um polo complexo
- β parte imaginária de um polo complexo
- θ incremento angular
- δ delta de Dirac

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	9
1.1 Objetivo geral	10
1.2 Objetivos específicos.....	10
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	11
2.1 Controle de Processos Químicos.....	11
2.2 Controladores de Realimentação	12
2.2.1 CONTROLADOR PROPORCIONAL (P).....	12
2.2.2 CONTROLADOR PROPORCIONAL-INTEGRAL (PI).....	14
2.2.3 CONTROLADOR PROPORCIONAL-INTEGRAL-DERIVATIVO (PID)	16
2.2.4 AÇÃO DIRETA E REVERSA DO CONTROLADOR	18
2.3 Estabilidade	18
2.3.1 CONCEITO DE ESTABILIDADE.....	18
2.3.2 FUNÇÕES DEGRAU E IMPULSO.....	19
2.3.3 POLOS E ZEROS	21
2.3.4 CRITÉRIO DE ESTABILIDADE	21
2.3.5 TESTE DE ESTABILIDADE DE ROUTH	24
3 METODOLOGIA	27
3.1 Processo Proposto	27
3.2 Modelagem	28
3.3 Teste de Estabilidade de Routh Aplicado	34
3.4 Software de Programação	36
3.4.1 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON COM DIVISÕES SINTÉTICAS	37
3.4.2 MÉTODO DA BISSECÇÃO.....	40
3.4.2.1 Método de Bissecção Adaptado para o Caso Estudado	41
3.4.3 SIMULAÇÃO PARA DIFERENTES VALORES DO GANHO PROPORCIONAL	44
4 RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	46
5 CONCLUSÃO	55
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	56
APÊNDICE A.....	58
APÊNDICE B.....	59

APÊNDICE C	61
APÊNDICE D	62

1 INTRODUÇÃO

O controle de processos químicos é imprescindível para uma planta química que demanda a manutenção das variáveis de processo dentro dos valores desejados em um projeto. O sistema de controle é de enorme utilidade, independentemente do tipo de processo ou condições operacionais envolvidas. Qualquer indústria que almeja o sucesso em âmbitos comerciais, econômicos e socioambientais o tem como parte integrada (SALVARANI, 2015).

Os benefícios de se empregar uma malha de controle são diversos. Dentre eles, se destacam a previsibilidade adquirida diante de um comportamento naturalmente dinâmico, a manutenção contínua da qualidade do produto e a diminuição da necessidade do trabalho humano. Deste modo, a lucratividade e a produtividade estão diretamente relacionadas ao bom funcionamento do controle (SMITH; CORRIPIO, 2008).

Além disso, deve-se salientar que a segurança operacional e a proteção ambiental são exigências da legislação no âmbito industrial. Dessa forma, variáveis do processo que causam desordem e possíveis acontecimentos danosos tanto aos operadores quanto ao meio ambiente devem ser submetidos ao controle de processos. Como exemplo, um controlador bem mensurado pode evitar o transbordamento de tanques, excesso de rejeitos, explosões e até possíveis acidentes operacionais (STEPHANOPOULOS, 1984).

De acordo com Smith e Corripi (2008), existem duas condições de controle distintas. Na condição manual, um operador deve observar constantemente o que ocorre com a medição da variável controlada para intervir no processo. Esta forma de controle não foi o enfoque do trabalho, e sim a condição automática que substituiu amplamente a primeira em processos químicos, principalmente por minimizar os erros gerados pelo modo manual.

O controlador, antes de fazer parte de um sistema real, deve passar por testes que simulam eventuais perturbações para provar assim sua capacidade de compensar os efeitos dessas sobre o produto de interesse (CARVALHO, 2014). O comportamento dinâmico desses sistemas é descrito em equações diferenciais lineares e convertidos em transformadas de Laplace. Portanto o uso de um *software* computacional é indispensável para examinar a relação controle-sistema.

1.1 Objetivo geral

Avaliar a influência do ganho proporcional (K_c) na estabilidade de um tanque de aquecimento com agitação contínua controlado por um sistema de realimentação PID.

1.2 Objetivos específicos

- Analisar a estabilidade do sistema pelo método analítico de Routh e obter o ponto crítico do K_c ;
- Executar métodos numéricos usando linguagem de programação do *MATLAB* para pesquisar o ponto crítico;
- Simular as respostas do sistema às perturbações impulso e degrau para diferentes valores de K_c ;
- Determinar o desempenho do controle PID para as condições de estabilidade simuladas.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Controle de Processos Químicos

O projeto de uma planta química impõe que sua operação cubra várias exigências para que as variáveis de processo sejam mantidas com valores especificados. Para que essas especificações sejam garantidas, malhas de controle são necessárias, interligando-se à planta, e conservando estas variáveis nos valores desejados de projeto (STEPHANOPOULOS, 1984).

Segundo Smith e Corripi (2008), um sistema de controle necessariamente deve apresentar três componentes básicos: transmissor-sensor, controlador e elemento final de controle. Esses componentes têm uma grande relevância, pois vão realizar os três procedimentos básicos de um sistema de controle.

São estes:

- Medição da variável controlada, realizada pelo transmissor-sensor, onde se inicia o monitoramento;
- Decisão, que é tomada pelo controlador para manter a variável controlada em seu valor de projeto;
- Ação, que é o resultado efetivo da decisão do controlador e ocorre no elemento final de controle (geralmente, uma válvula de controle).

O controle de malha fechada se dá quando a ação, ao ser efetuada, gera uma mudança na medição da variável controlada e, consequentemente, na decisão do controlador. Estas etapas se repetem e um ciclo é gerado. Já, a condição de malha aberta consiste na inexistência desse ciclo. Não há uma realimentação e a medição da variável controlada não altera o sinal de saída do controlador (SMITH; CORRIPPIO, 2008).

Conforme Ogata (2011), deve-se conceituar alguns termos que sempre fazem parte do assunto:

- Variável controlada: é a variável cujo valor real deve ser mantido em um *set point* (valor de referência);
- Variável manipulada: é a variável cujo ajuste mantém ou aproxima a variável controlada do *set point*;

- Distúrbio: variável que sofre mudança durante o processo e causa o afastamento da variável controlada em relação ao *set point*.

Este trabalho deu maior enfoque à estratégia de realimentação, cujo controle é baseado no sinal de transmissão proveniente da medição da variável controlada. O controlador não tem conhecimento da origem e nem do tipo de distúrbio, apenas o que ele causa. Porém, a desvantagem é que esse deve esperar a propagação do distúrbio ao longo do processo até atingir a variável controlada (SMITH; CORRIPIO, 2008).

2.2 Controladores de Realimentação

De acordo com Stephanopoulos (1984), os controladores são os dispositivos responsáveis por manter a variável monitorada em um ponto fixo. Sua função é receber o sinal de transmissão e compará-lo ao sinal do *set point*, pré-programado. Assim, a entrada do controlador é o erro. Esse erro é a diferença entre o ponto fixo e o valor real da variável controlada em certo instante. Através desse erro, o sinal de saída do controlador é gerado. Esse sinal ajusta a variável manipulada e minimiza o erro.

Os controladores de realimentação podem ser classificados de acordo com o número de ações para solucionar o erro:

- Controlador Proporcional (P);
- Controlador Proporcional-Integral (PI);
- Controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID).

Segundo Smith e Corripio (2008), essa espécie de controlador decide como executar o controle de acordo com a solução de uma equação baseada na diferença entre a variável controlada e o set point.

2.2.1 CONTROLADOR PROPORCIONAL (P)

É o controlador que tem seu sinal de saída proporcional ao erro. Segundo Stephanopoulos (1984), a Equação 2.1 descreve seu comportamento:

$$c(t) = c_s + K_c * e(t) \quad (2.1)$$

Onde:

- $c(t)$ – sinal de saída do controlador em certo tempo;
- c_s – bias, ou sinal de saída do controlador no estado estacionário inicial, quando o erro é nulo;
- K_c – ganho proporcional do controlador;
- $e(t)$ – erro em certo tempo.

A função de transferência (FT) do controlador pode ser obtida através da equação em variável de desvio. Ao escrever a Equação 2.1 em variável-desvio, tem-se a Equação 2.2:

$$C(t) = K_c * E(t) \quad (2.2)$$

Onde:

- $C(t) = c(t) - c_s$; variável de desvio é a diferença entre a grandeza em certo tempo e seu valor em estado estacionário;
- $E(t) = e(t) - e_s$; $e_s = 0$; o erro no estado estacionário inicial é nulo.

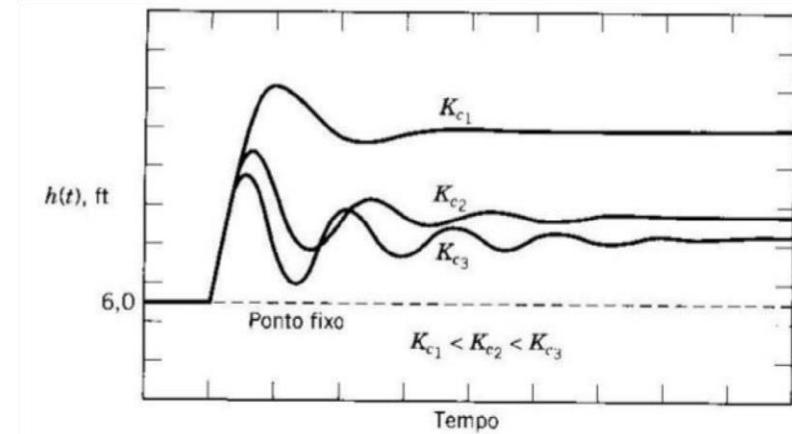
Ao aplicar transformada de Laplace (TL) na Equação 2.2, tem-se a FT do controlador P na Equação 2.3:

$$G_c(s) = K_c \quad (2.3)$$

Para Smith e Corripio (2008), a vantagem de se utilizar esse controlador é que ele apresenta apenas um parâmetro de sintonia, o ganho proporcional (K_c), o que facilita a sintonização. Entretanto, a desvantagem é a presença permanente de um erro residual (*offset*), o que afasta constantemente a variável controlada do set point.

Na Figura 2.1, pode-se observar que mesmo após a ação do controlador, um erro residual ainda persiste em estado estacionário.

Figura 2.1 – Resposta do nível de líquido ao longo do tempo com diferentes ganhos proporcionais.



Fonte: SMITH; CORRIPIO, 2008, p. 160

Percebe-se, pela Figura 2.1, que quanto maior é o K_c , menor é o *offset*, porém maior é a oscilação do processo, ou seja, mais instável. Para a maior parte dos processos, há um ganho máximo que, ultrapassado, o sistema torna-se instável. Consequentemente, para manter a estabilidade, o erro em estado estacionário não pode ser completamente eliminado (SMITH; CORRIPIO, 2008).

2.2.2 CONTROLADOR PROPORCIONAL-INTEGRAL (PI)

É o controlador utilizado quando não é possível operar com *offset*. Neste controle, existem duas ações que atuam conjuntamente, a proporcional e a integral. Também é conhecido como controlador proporcional e restaurador, segundo Stephanopoulos (1984). Sua Equação 2.4 é descrita a seguir:

$$c(t) = K_c * e(t) + \frac{K_c}{\tau_i} \int e(t) dt + c_s \quad (2.4)$$

Onde: τ_i - tempo integral ou de restauração, em minutos;

O tempo integral é o parâmetro de sintonia juntamente com o K_c . Nesse controle, o erro no estado estacionário é totalmente eliminado. O controlador PI varia constantemente sua saída enquanto o erro ainda estiver presente. Ocorre a integração do erro. Somente quando o erro é zerado que a variação na saída do

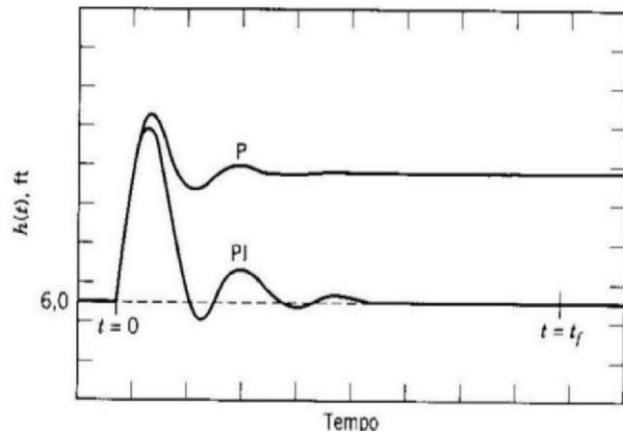
controlador cessa. Assim, a variável controlada retorna ao *set point* (STEPHANOPOULOS, 1984).

A FT é obtida ao seguir o mesmo procedimento do controlador P ao aplicar variável-desvio e TL, na Equação 2.5:

$$G_c(s) = \frac{C(s)}{E(s)} = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} \right) \quad (2.5)$$

A Figura 2.2 ilustra como a ação integral anula o erro residual através da integração:

Figura 2.2 – Resposta do nível de líquido ao longo do tempo com controladores PI e P

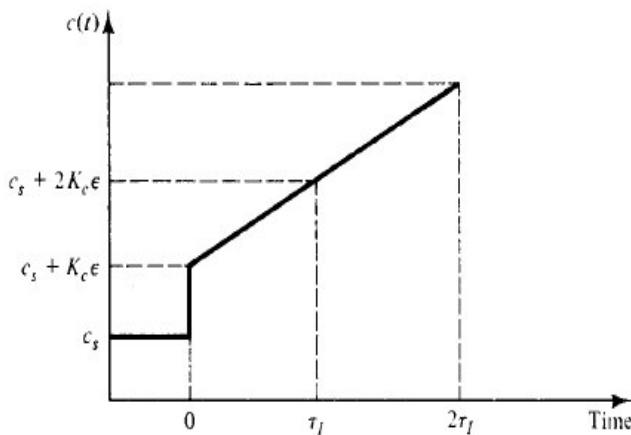


Fonte: SMITH; CORRIPIO, 2008, p. 164

De acordo com Kwong (2002), o uso do controle PI tem algumas desvantagens. Pode gerar comportamento oscilatório em processos de primeira ordem. Já um processo de segunda ordem pode se tornar instável com esse tipo de controlador.

Na Figura 2.3, é demonstrado o significado físico do tempo integral. Esse é o intervalo de tempo necessário para que o controlador repita a ação tomada pelo modo proporcional (SMITH; CORRIPIO, 2008). Assim que o controlador é informado do erro em $t = 0$, ocorre uma variação degrau em sua saída. O tempo que leva para que essa variação se repita é o tempo integral ou de restauração.

Figura 2.3 – Resposta do controlador PI a uma variação em degrau no erro



Fonte: STEPHANOPOULOS, 1984, p. 247

2.2.3 CONTROLADOR PROPORCIONAL-INTEGRAL-DERIVATIVO (PID)

Este é o controlador mais sofisticado descrito até aqui. A ação derivativa, também conhecida como antecipatória, tem como objetivo dar ao controlador o poder de antecipar o comportamento do erro em relação ao tempo ao examinar a sua derivada (SMITH; CORRIPIO, 2008). Possui três parâmetros a serem sintonizados: o ganho K_c , o tempo de restauração (τ_i) e o tempo derivativo (τ_d).

A Equação 2.6, segundo Stephanopoulos (1984), é descrita a seguir:

$$c(t) = K_c * e(t) + \frac{K_c}{\tau_i} \int e(t) dt + K_c * \tau_d * \frac{de(t)}{dt} + c_s \quad (2.6)$$

A FT desse controlador é encontrada do mesmo modo que os controladores P e PI, na Equação 2.7:

$$G_c(s) = K_c * \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s \right) \quad (2.7)$$

O controlador PID procura minimizar o desvio da variável de processo ao se basear na taxa de variação do erro ao longo do tempo. Sensível à velocidade de aumento ou diminuição do erro, reduz as oscilações ao redor do set point. Esse controle não atua quando o erro é constante, apenas quando varia. A estabilidade do sistema é, assim, garantida de forma mais rápida (STEPHANOPOULOS, 1984).

De acordo com Smith e Corripio (2008), esses controladores são indicados para processos mais lentos, como malhas de temperatura, que não apresentam ruídos.

2.2.4 AÇÃO DIRETA E REVERSA DO CONTROLADOR

O desvio da variável controlada em relação ao *set point* e a tomada de decisão do controlador para minimizá-lo determina o sinal matemático do Kc em uma malha de realimentação.

De acordo com a definição do erro descrita na seção 2.2 e conforme Smith e Corripio (2008), um aumento na variável controlada em relação ao *set point* pode diminuir o sinal do controlador. Neste caso, a ação de controle é reversa e Kc adquire sinal positivo. Caso contrário, onde o aumento da variável controlada causa um aumento no sinal do controlador, a ação é direta e Kc adquire um sinal negativo.

Sistemas de aquecimento com injeção de vapor é um exemplo típico de controle com ação reversa, pois quando a temperatura de saída aumenta em relação ao set point, o controlador decide pelo maior fechamento da válvula para menor entrada de vapor e, consequentemente, menos transferência de calor, para minimizar o desvio. Já, sistemas de controle de nível como o citado na Figura 2.2, são típicos de ação direta, onde o controlador decide por um aumento da vazão de saída caso a altura do líquido no reservatório se eleve em comparação com a altura no regime estacionário. Nesses casos, é considerado que o aumento do sinal do controlador representa abertura da válvula e a queda do sinal, fechamento (SMITH; CORRIPIO, 2008).

2.3 Estabilidade

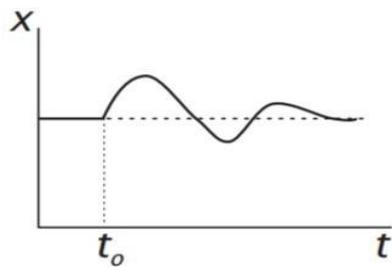
2.3.1 CONCEITO DE ESTABILIDADE

Conforme Coughanowr e Koppel (1978), “[...] um sistema estável será aquele para o qual a resposta de saída é limitada para todas as entradas limitadas.”

Já Stephanopoulos (1984, tradução nossa) constata que “um sistema é considerado instável se, após esse ter sido perturbado por uma mudança na entrada, sua saída se deslocou e não retornou ao estado inicial de repouso”.

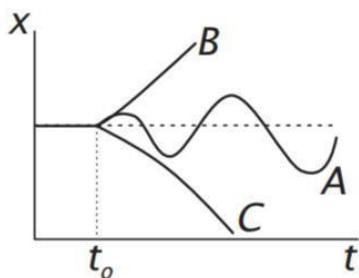
As Figuras 2.4 e 2.5 ilustram de forma simplificada a definição de sistemas estável e instável:

Figura 2.4 – Sistema estável ou auto regulatório¹



Fonte: Departamento de Engenharia Química da Universidade Federal de São Carlos.

Figura 2.5 – Sistema instável²



Fonte: Departamento de Engenharia Química da Universidade Federal de São Carlos.

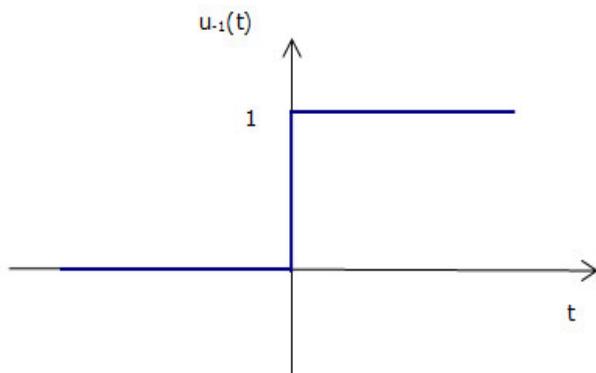
2.3.2 FUNÇÕES DEGRAU E IMPULSO

Como exemplos de entradas limitadas tem-se as funções degrau e impulso, ilustradas nas Figuras 2.6 e 2.7, respectivamente. São funções que, no domínio do tempo, convergem a um valor finito.

¹ Disponível em: <<http://www.professores.deq.ufscar.br/ronaldo/cp1/pdf/aula12.pdf>> Acesso em maio de 2018.

² Disponível em: <<http://www.professores.deq.ufscar.br/ronaldo/cp1/pdf/aula12.pdf>> Acesso em maio de 2018.

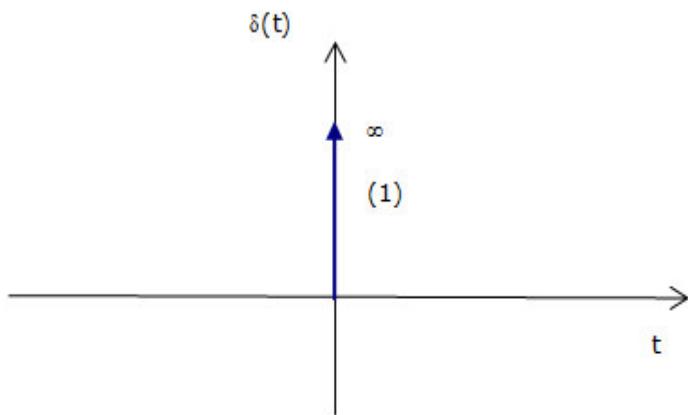
Figura 2.6 – Função degrau unitário³



Fonte: Departamento de Engenharia Elétrica da PUC-Rio

Pode-se interpretar uma perturbação na entrada em degrau como uma variação brusca em certo instante que permanece constante ao longo do tempo (OGATA, 2011). Como exemplo, pode-se considerar uma torneira, que ao ser aberta, o registro é deixado na mesma posição sem variação do fluxo de água. De nulo, o fluxo passou a ser constante.

Figura 2.7 – Função impulso unitário⁴



Fonte: Departamento de Engenharia Elétrica da PUC-Rio

³ Disponível em: <<http://www.maxwell.vrac.puc-rio/29821/introducao.html>> Acesso em junho de 2021.

⁴ Disponível em: <<http://www.maxwell.vrac.puc-rio/29821/introducao.html>> Acesso em junho de 2021.

Já uma perturbação na entrada em impulso pode ser interpretada como uma variação altíssima em um instante infinitamente pequeno, que retorna ao valor de zero ao longo do tempo. O infinito, neste caso, pode ser interpretado como um altíssimo valor. Como exemplo, um choque térmico exemplifica bem a função impulso.

De acordo com Ogata (2011), essas perturbações são frequentemente usadas para simular a resposta de um sistema submetido a um controle, e sua estabilidade. No caso de um sistema que sofre variações bruscas na entrada e o novo valor permanece, a função degrau é um sinal de teste mais apropriado. Em contrapartida, a função impulso é mais recomendável para variações de impacto.

2.3.3 POLOS E ZEROS

A fim de compreender melhor o conceito de estabilidade, deve-se conceituar polos e zeros. Considere a FT abaixo:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (2.8)$$

$N(s)$ e $D(s)$ são polinômios (numerador e denominador) irreduzíveis entre si, isto é, não apresentam fatores comuns. $D(s)$ possui grau maior que $N(s)$ para que o sistema seja fisicamente realizável. Zeros (z) são as raízes do numerador e, consequentemente $G(z) \rightarrow 0$ quando $s = z$. Polos (p) são as raízes do denominador e, desse modo, $G(p) \rightarrow \infty$ quando $s = p$ (STEPHANOPOULOS, 1984).

2.3.4 CRITÉRIO DE ESTABILIDADE

A resposta para um sistema de controle em malha fechada é descrita a seguir pela Equação 2.9, dada por Stephanopoulos (1984):

$$Y(s) = \frac{G_p(s)G_f(s)G_c(s)}{1+G_p(s)G_f(s)G_c(s)G_m(s)} * Ysp(s) + \frac{G_d(s)}{1+G_p(s)G_f(s)G_c(s)G_m(s)} * d(s) \quad (2.9)$$

Que é equivalente à Equação 2.10:

$$Y(s) = G_{sp}(s) * Y_{sp}(s) + G_{load}(s) * d(s) \quad (2.10)$$

A estabilidade da resposta em malha fechada é determinada pelos polos de $G_{sp}(s)$ e $G_{load}(s)$.

Os polos são iguais para ambas as funções, pois os denominadores da Equação 2.9 são iguais:

$$1 + G_p(s)G_f(s)G_c(s)G_m(s) = 0 \quad (2.11)$$

A Equação 2.11 é a equação característica do sistema. A estabilidade do mesmo depende das raízes da equação acima. Tanto é que essa equação se chama “característica” por caracterizar o comportamento da resposta do sistema em malha fechada.

Ao resolvê-la, suas raízes (p_n) são obtidas na Equação 2.12:

$$1 + G_p(s)G_f(s)G_c(s)G_m(s) = (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n) = 0 \quad (2.12)$$

Pode-se concluir como primeiro critério de estabilidade que um sistema de controle de realimentação é considerado estável quando todos os polos (raízes da equação característica) são números reais negativos e pares conjugados complexos com parte real negativa. Em contrapartida, caso um dos polos é real positivo ou os pares conjugados complexos ter parte real positiva, o sistema é instável (STEPHANOPOULOS, 1984).

Para compreender melhor a razão disso ocorrer, a Equação 2.9 deve ser expandida em frações parciais:

$$Y(s) = \frac{b_1}{s-p_1} + \frac{b_2}{s-p_2} + \dots + \frac{b_n}{s-p_n} + \text{resposta forçada} \quad (2.13)$$

Ao aplicar transformada de Laplace inversa (TLI) na Equação 2.13, tem-se a função temporal 2.14, que descreve o perfil da resposta em malha fechada após a perturbação na entrada:

$$y(t) = b_1 * e^{p_1 t} + b_2 * e^{p_2 t} + \dots + b_n * e^{p_n t} + \text{resposta forçada} \quad (2.14)$$

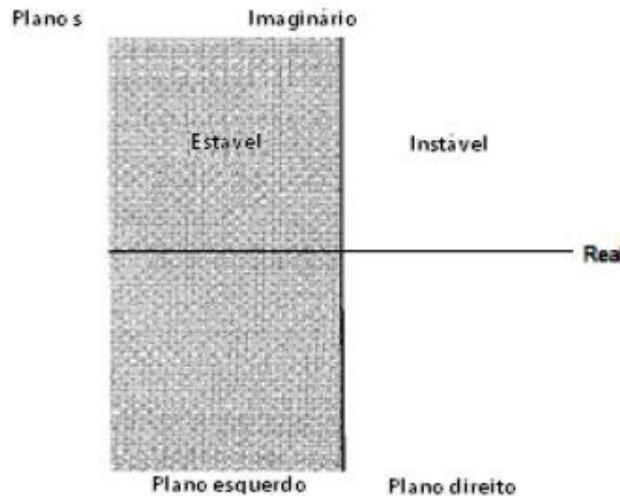
Conforme Smith e Corripio (2008), a resposta global é a soma da resposta natural com a resposta forçada. A forçada é gerada pelos polos da perturbação na entrada e a natural é oriunda dos polos da FT.

A estabilidade em um sistema linear depende exclusivamente da sua equação característica, ou seja, é uma propriedade inerente ao sistema, somente quando as formas de estímulo são limitadas, como o impulso ou degrau. Já, aonde o estímulo limitado ocorre, se é na carga ou no *set point*, isso não interfere na estabilidade. (COUGHANOWR; KOPPEL, 1978).

Segundo Smith e Corripio (2008), para raízes reais: caso $p < 0$, então e^{pt} tende a 0 ao passo que o tempo tende ao infinito. Para raízes complexas $p = \alpha + \beta i$, então $e^{pt} = e^{\alpha t} * \text{sen}(\beta t + \theta)$. Caso $\alpha < 0$, então $e^{\alpha t} * \text{sen}(\beta t + \theta)$ tende a 0 ao passo que o tempo tende ao infinito.

Logo, a parte real das raízes complexas e as raízes reais da equação característica devem ser negativas para os termos da resposta tenderem a 0. Isto significa que a resposta é limitada ao decorrer do tempo. Quando um termo exponencial é decrescente, esse indica que ocorre estabilidade. Quando são gerados termos exponenciais crescentes na resposta da malha, surge instabilidade no sistema. O plano complexo s apresentado pela Figura 2.8 posiciona as raízes em regiões estável e instável ao delimitá-las com o eixo vertical imaginário e o eixo horizontal real (SMITH; CORRIPIO, 2008).

Figura 2.8 – Plano s (região estável à esquerda e região instável à direita)



Fonte: CARVALHO, 2014, p. 22

2.3.5 TESTE DE ESTABILIDADE DE ROUTH

Este teste de estabilidade não é baseado em calcular os valores das raízes da equação característica, conforme Stephanopoulos (1984). O critério requer saber se há alguma raiz no lado direito do eixo imaginário do plano s.

Coughanowr e Koppel (1978) averiguaram que, caso a equação característica apresente raízes com partes reais positivas, isso já comprova a instabilidade do sistema. Caso não apresente, o sistema é estável.

Para isso, é necessário escrever a Equação característica 2.11 em sua forma polinomial, como na Equação 2.15:

$$a_0 * s^n + a_1 * s^{n-1} + \dots + a_{n-1} * s + a_n = 0 \quad (2.15)$$

Onde $a_0 > 0$.

Caso $a_0 < 0$, deve-se multiplicar a equação por -1. Todos os coeficientes devem ser positivos. Caso um coeficiente seja negativo, o sistema já é declarado instável e não há necessidade de prosseguir o teste. Se todos os coeficientes do polinômio de grau n forem positivos, o sistema pode ser estável ou instável. Portanto, deve-se realizar o segundo teste, que é o arranjo de Routh. Nesse arranjo, os coeficientes devem ficar nas duas primeiras linhas. O arranjo deve ter $n+1$ linhas.

Se o polinômio tiver 7 coeficientes, por exemplo, o arranjo tem que ter 8 linhas (COUGHANOWR; KOPPEL, 1978).

A Tabela 2.1 apresenta o arranjo de Routh:

Tabela 2.1 – Arranjo de Routh

Linhas	Coeficientes			
1	a0	a2	a4	a6
2	a1	a3	a5	a7
3	b1	b2	b3	
4	c1	c2	c3	
5	d1	d2		
6	e1	e2		
7	f1			
n+1	g1			

Fonte: Adaptado de (COUGHANOWR; KOPPEL, 1978, p. 150)

Os elementos a partir da linha 3 são encontrados com as equações subsequentes:

$$b_1 = \frac{a_1 * a_2 - a_0 * a_3}{a_1} \quad (2.16)$$

$$b_2 = \frac{a_1 * a_4 - a_0 * a_5}{a_1} \quad (2.17)$$

$$c_1 = \frac{b_1 * a_3 - a_1 * b_2}{b_1} \quad \dots \quad (2.18)$$

$$c_2 = \frac{b_1 * a_5 - a_1 * b_3}{b_1} \quad (2.19)$$

Os elementos restantes são calculados ao seguir a lógica das Equações 2.16, 2.17, 2.18 e 2.19. Finalizados os cálculos, é verificado se os elementos da primeira coluna são positivos e diferentes de zero. Caso sejam, o sistema é estável. Se algum elemento dessa coluna for negativo, o sistema é instável. O número de

trocas de sinal da primeira coluna é igual ao número de raízes com parte real positiva (STEPHANOPOULOS, 1984).

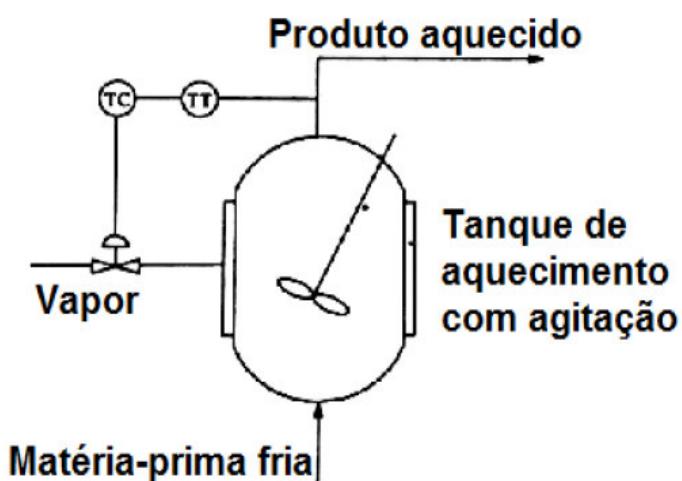
3 METODOLOGIA

3.1 Processo Proposto

Esta monografia abordou sobre um processo teórico proposto por Constantinides e Mostoufi (1999). Segundo Smith e Corripio (2008), um tanque de aquecimento com agitação contínua cujo fluxo de alimentação é líquido precisa ser mantido sob aquecimento para manter sua composição uniforme. Nesses tipos de reservatórios com agitação, é fundamental o controle da temperatura para o produto final não se decompor em altas temperaturas, nem se tornar uma mistura incompleta em baixas temperaturas. Uma válvula injetora de vapor é conectada ao processo para que haja entrada de vapor e consequente transferência de calor latente ao fluido, devido à condensação. Assim se dá o aquecimento da matéria-prima.

O processo é submetido a um sistema de realimentação em malha fechada sob ação proporcional-integral-derivativa (PID). O controlador toma a decisão sobre a posição da válvula (variável manipulada), o que gera seu fechamento ou abertura diante da medição. A perturbação, de acordo com Constantinides e Mostoufi (1999), ocorre na temperatura de entrada (carga) e causa o desvio da temperatura de saída em relação ao *set point*. A Figura 3.1 esquematiza o tanque sugerido:

Figura 3.1 – Tanque de aquecimento sob agitação contínua



Fonte: CARVALHO, 2014, p. 25

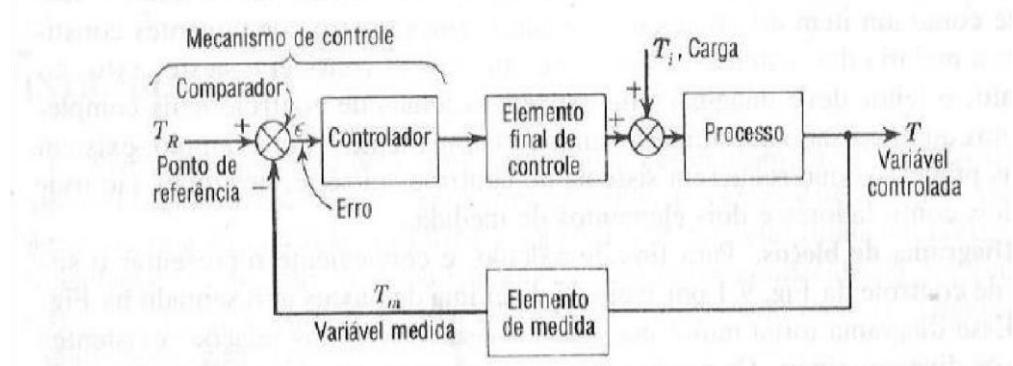
A finalidade do controlador PID é retornar a temperatura de saída em seu *set point*, ao minimizar o erro, até zerá-lo. Por isso, é relevante analisar a estabilidade do processo a partir do seu K_c . O ganho crítico é calculado, e a partir desse, a estabilidade do processo pode ser analisada para diferentes valores.

A FT global do sistema em malha fechada é dada em Constantinides e Mostoufi (1999). A modelagem que resulta nessa função é demonstrada na seção seguinte.

3.2 Modelagem

A Figura 3.2 demonstra como um processo pode ser dividido em componentes, definidos num diagrama de blocos. Portanto, de acordo com Coughanowr e Koppel (1978), o processo proposto pode ser desmembrado em processo, elemento de medida (sensor-transmissor), elemento final de controle (válvula de injeção de vapor) e o controlador PID.

Figura 3.2 – Diagrama de blocos para um sistema de controle simples



Fonte: COUGHANWR; KOPPEL, 1978, p. 99

Constata-se em Constantinides e Mostoufi (1999) que todos os componentes do processo são sistemas de primeira ordem. Portanto, suas FT's também são.

Para se chegar à FT global, é considerado um balanço de energia para o tanque em regime transiente:

$$q + wC(T_i - T_0) - wC(T - T_0) = \rho CV \frac{dT}{dt} \quad (3.1)$$

Onde:

- q – fluxo térmico proveniente do vapor;
- w – vazão mássica;
- C – calor específico do fluido;
- T_i – temperatura de entrada;
- T_0 – temperatura de referência (*set point*);
- ρ – densidade do fluido;
- V – volume de fluido dentro do tanque.

A Equação 3.1 é descrita em regime estacionário, quando $\frac{dT}{dt} = 0$:

$$qs + wC(T_{is} - T_0) - wC(T_s - T_0) = 0 \quad (3.2)$$

A Equação 3.2 é subtraída da Equação 3.1 e as variáveis-desvio surgem na Equação 3.3:

$$(q - qs) + wC[(T_i - T_{is}) - (T - T_s)] = \rho CV \frac{d(T - T_s)}{dt} \quad (3.3)$$

Onde são substituídas pelas Equações 3.4, 3.5 e 3.6:

$$\bullet \quad q - qs = Q \quad (3.4)$$

$$\bullet \quad T_i - T_{is} = T'_i \quad (3.5)$$

$$\bullet \quad T - T_s = T' \quad (3.6)$$

Portanto, obtém-se a Equação 3.7:

$$Q + wC(T'_i - T') = \rho CV \frac{dT'}{dt} \quad (3.7)$$

Ao aplicar a TL, obtém-se a Equação 3.8:

$$T'(s) \left(\frac{\rho V}{w} * s + 1 \right) = \frac{Q(s)}{wC} + T'i(s) \quad (3.8)$$

A expressão anterior é descrita conforme a Equação 3.9:

$$T'(s) = \frac{\frac{1}{w*c}}{\tau_p*s+1} * Q(s) + \frac{1}{\tau_p*s+1} * T'i(s) \quad (3.9)$$

Onde: $\tau_p = \frac{\rho * V}{w}$

Quando o processo apresenta somente variação na temperatura, $Q(t) = 0$, tem-se a seguinte FT descrita na Equação 3.10:

$$G_d(s) = \frac{T'(s)}{T'i(s)} = \frac{1}{\tau_p*s+1} \quad (3.10)$$

Quando o processo apresenta somente variação na entrada de calor, $T'i(t) = 0$, tem-se a seguinte FT descrita na Equação 3.11:

$$G_p(s) = \frac{T'(s)}{Q(s)} = \frac{\frac{1}{w*c}}{\tau_p*s+1} = \frac{K_p}{\tau_p*s+1} \quad (3.11)$$

Onde: K_p – ganho estático de primeira ordem do processo e τ_p – constante de tempo de primeira ordem para o processo.

Agora, conforme Coughanowr e Koppel (1978), é determinada na Equação 3.12 a FT do elemento de medida, que como já foi dito, é um sistema de primeira ordem:

$$G_m(s) = \frac{T'_m(s)}{T'(s)} = \frac{K_m}{\tau_m*s+1} \quad (3.12)$$

Onde:

- K_m – constante de primeira ordem do elemento de medida;
- τ_m – constante de tempo de primeira ordem do elemento de medida;
- $T'_m(s)$ – variável de desvio da temperatura de saída medida;
- $T'(s)$ – variável de desvio da temperatura a ser medida (entrada do sensor).

Ao considerar que o controlador no estudo é um controlador proporcional-integral-derivativo (PID), já foi definida sua FT na Equação 2.7:

$$G_c(s) = K_c * \left(1 + \frac{1}{\tau_i * s} + \tau_d * s\right) \quad (3.13)$$

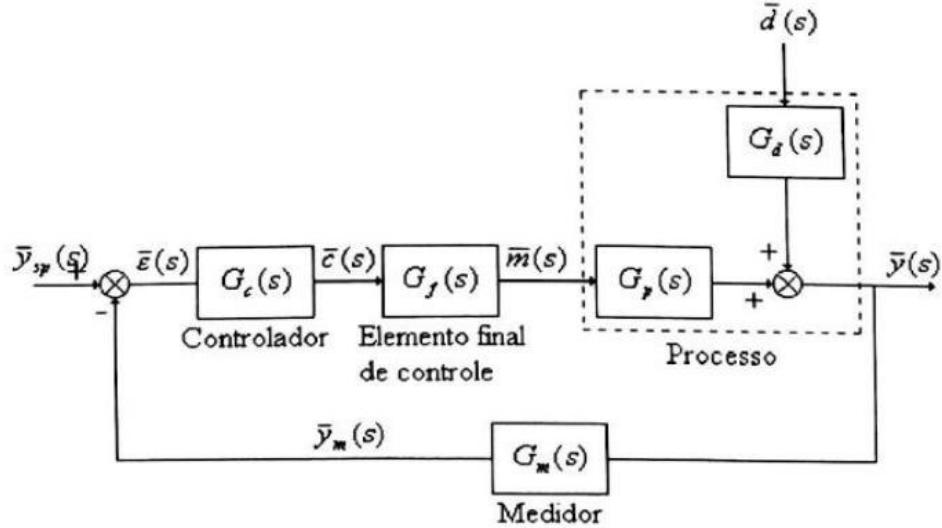
De acordo com Coughanowr e Koppel (1978), a Equação 3.14 descreve a FT do elemento final de controle, que como também já foi mencionado, é um sistema de primeira ordem:

$$G_f(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{K_v}{\tau_v * s + 1} \quad (3.14)$$

Onde: K_v – constante de primeira ordem da válvula e τ_v – constante de tempo de primeira ordem da válvula.

Com todas as FT's dos componentes demonstradas, um diagrama de blocos para representá-las é bem útil. Assim, fica mais fácil compreender a origem da FT global dada em Constantinides e Mostoufi (1999). A Figura 3.3 ilustra o diagrama:

Figura 3.3 – Diagrama de blocos de um sistema de realimentação em malha fechada



Fonte: CARVALHO, 2014, p. 29

A Figura 3.3 apresenta como os componentes de um sistema de controle realimentado interagem entre si. A resposta em malha fechada é descrita na Equação 3.15, conforme Stephanopoulos (1984), e equivale à Equação 2.9:

$$Y(s) = \frac{G_p(s)G_f(s)G_c(s)}{1+G_p(s)G_f(s)G_c(s)G_m(s)} * Y_{sp}(s) + \frac{G_d(s)}{1+G_p(s)G_f(s)G_c(s)G_m(s)} * d(s) \quad (3.15)$$

Na Equação 3.15, segundo Stephanopoulos (1984), o primeiro termo representa o efeito sobre a variável controlada proveniente de um distúrbio no *set point*. Já o segundo termo representa o efeito sobre a variável controlada proveniente de um distúrbio na carga. Como no processo estudado o *set point* não é considerado um distúrbio, o termo $Y_{sp}(s)$ é nulo. Portanto, não há controle servo, apenas controle regulador. O controlador PID tem a função de compensar apenas a perturbação na carga (variação na temperatura de entrada) para retornar a temperatura de saída próxima ao valor de *set point*.

Portanto, ao anular o primeiro termo da Equação 3.15, obtém-se:

$$Y(s) = \frac{G_d(s)}{1+G_p(s)G_f(s)G_c(s)G_m(s)} * d(s) \quad (3.16)$$

São substituídas na Equação 3.16 as expressões que representam as FT's dos componentes e a modelagem é finalizada:

$$\frac{Y(s)}{d(s)} = \frac{\frac{1}{\tau_p * s + 1}}{1 + \left(\frac{K_p}{\tau_p * s + 1} \right) * \left(\frac{K_v}{\tau_v * s + 1} \right) * \left(Kc * \left(1 + \frac{1}{\tau_i} * s + \tau_d * s \right) \right) * \left(\frac{K_m}{\tau_m * s + 1} \right)} \quad (3.17)$$

Ao multiplicar o numerador e o denominador da Equação 3.17 por $\tau_i * s$, obtém-se a Equação 3.18:

$$\frac{Y(s)}{d(s)} = \frac{\frac{\tau_i * s}{\tau_p * s + 1}}{\tau_i * s + \left(\frac{K_p K_v K_m K_c}{(\tau_p * s + 1)(\tau_v * s + 1)(\tau_m * s + 1)} \right) (\tau_i * s + 1 + \tau_d * \tau_i * s^2)} \quad (3.18)$$

Ao seguir o que é proposto por Constantinides e Mostoufi (1999), substitui-se:

$$K = K_p * K_v * K_m * K_c$$

Ao desenvolver a Equação 3.18, é obtida a Equação 3.19, que desenvolvida novamente, gera a Equação 3.20:

$$\frac{Y(s)}{d(s)} = \frac{\frac{\tau_i * s}{\tau_p * s + 1}}{\left\{ \frac{\tau_i * s (\tau_p * s + 1) (\tau_v * s + 1) (\tau_m * s + 1)}{(\tau_p * s + 1) (\tau_v * s + 1) (\tau_m * s + 1)} \right\} + \left\{ \frac{K (\tau_i * s + 1 + \tau_d * \tau_i * s^2)}{(\tau_p * s + 1) (\tau_v * s + 1) (\tau_m * s + 1)} \right\}} \quad (3.19)$$

$$\frac{Y(s)}{d(s)} = \frac{\tau_i s}{(\tau_p s + 1)} * \left(\frac{(\tau_p s + 1) (\tau_v s + 1) (\tau_m s + 1)}{\tau_i s (\tau_p s + 1) (\tau_v s + 1) (\tau_m s + 1) + K (\tau_i s + 1 + \tau_d \tau_i s^2)} \right) \quad (3.20)$$

Ao cancelar alguns termos do numerador e do denominador, é obtida a FT global do problema proposto por Constantinides e Mostoufi (1999):

$$\frac{Y(s)}{d(s)} = \frac{(\tau_i s) (\tau_v s + 1) (\tau_m s + 1)}{\tau_i s (\tau_p s + 1) (\tau_v s + 1) (\tau_m s + 1) + K (\tau_i s + 1 + \tau_d \tau_i s^2)} \quad (3.21)$$

O denominador da Equação 3.21 é igualado a zero, o que determina a equação característica.

Descreve-se o denominador da Equação 3.21 na sua forma polinomial, como na Equação 3.22:

$$\begin{aligned} & \tau_i \tau_p \tau_m \tau_v s^4 + (\tau_i \tau_p \tau_m \tau_v + \tau_i \tau_p \tau_v + \tau_i \tau_m \tau_v) s^3 + \\ & (K \tau_i \tau_d + \tau_i \tau_p + \tau_i \tau_v + \tau_i \tau_m) s^2 + (\tau_i + K \tau_i) s + K = 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Um parâmetro K na equação característica depende do ganho proporcional do controlador Kc.

O valor crítico é o valor limite de Kc para que o sistema deixe de ser estável para se tornar instável. Matematicamente, é o valor limite entre os valores que geram raízes reais negativas e complexas com parte real negativa e valores que geram raízes reais positivas e complexas com parte real positiva. Para se calcular o valor crítico analiticamente, foi usado o critério de estabilidade de Routh.

3.3 Teste de Estabilidade de Routh Aplicado

Diferentes valores daqueles encontrados em Constantinides e Mostoufi (1999) para os parâmetros constantes da Equação 3.22 foram admitidos com o objetivo de garantir maior singularidade aos resultados dessa monografia, posto que os primeiros já foram utilizados na monografia de Carvalho (2014).

Os parâmetros admitidos foram:

- $\tau_i = 9,5$
- $\tau_d = 1,5$
- $\tau_p = 9,5$
- $\tau_m = 4,8$
- $\tau_v = 5,2$
- $K = 2,1 * Kc$

Ao substituir os valores na FT global 3.21, obteve-se:

$$\frac{Y(s)}{d(s)} = \frac{237,12 s^3 + 95 s^2 + 9,5 s}{2252,64 s^4 + 1139,62 s^3 + (29,925 Kc + 185,25) s^2 + (19,95 Kc + 9,5) s + 2,1 Kc} \quad (3.23)$$

A fim de analisar a estabilidade pelo método analítico, foi considerado o denominador da Equação 3.23. As Equações 3.24, 3.25 e 3.26 tiveram que satisfazer o primeiro teste de Routh, em que todos os coeficientes da equação característica devem ser positivos.

$$29,925 Kc + 185,25 > 0 \quad (3.24)$$

$$19,95 Kc + 9,5 > 0 \quad (3.25)$$

$$2,1Kc > 0 \quad (3.26)$$

Com o desenvolvimento teórico do arranjo de Routh apresentado na seção 2.3.5 e o denominador da Equação 3.23, foi possível chegar ao ponto crítico do ganho proporcional pelo método analítico. A Tabela 3.1 demonstra o procedimento:

Tabela 3.1 – Arranjo de Routh Aplicado

Linhas	Coeficientes		
1	2252,64	$29,925 Kc$ + 185,25	$2,1Kc$
2	1139,62	$19,95 Kc + 9,5$	0
3	166,4723 – 9,5082 Kc	$2,1Kc$	0
4	$c1$	0	0
5	$2,1Kc$		

Fonte: O próprio autor

Onde:

$$c1 = \frac{1581,4868 + 837,5925 Kc - 189,6886 Kc^2}{166,4723 - 9,5082 Kc}$$

Conforme o critério de estabilidade, foi realizada a intersecção entre as Equações 3.24, 3.25 e 3.26 e o arranjo de Routh. Com isso, o intervalo de valores de Kc nos quais o sistema é estável em malha fechada foi encontrado:

$$0 < K_c < 5,8426$$

Para valores maiores que 5,8426, o sistema é instável. O ganho crítico $K_c = 5,8426$ foi, assim, obtido analiticamente.

Nota-se que o critério usado não fornece mais detalhes do sistema, como os valores das raízes da equação característica, nem o grau de estabilidade. Apenas os valores de Kc para os quais o sistema é estável ou não (COUGHANOWR; KOPPEL, 1978).

Na próxima seção, o valor crítico foi encontrado com linguagem de programação do *MATLAB*, método proposto por Constantinides e Mostoufi (1999).

3.4 Software de Programação

O software utilizado para simular valores do Kc, encontrar as raízes da equação característica e definir o valor crítico foi o *MATLAB® R2021a*. O programa proporcionou ao usuário a chance de elaborar funções originais.

No intuito de calcular as raízes de qualquer polinômio de grau n que tenha até um par de raízes complexas, foi utilizada a função *NRsdivision.m* de Constantinides e Mostoufi (1999), que executa o método Newton-Raphson com as divisões sintéticas. Ao pesquisar as raízes para certos valores de Kc, a lógica do método da bissecção foi introduzida para encontrar o valor crítico.

Todo código de programação para executar esses métodos foi escrito na janela *Editor*, que confere a possibilidade de criar novos comandos e executá-los de uma só vez. As respostas para os comandos criados foram geradas na janela *Command Window*, que também foi usada para executar funções mais básicas a partir das entradas optadas pelo usuário. Para que essas novas funções pudessem ser executadas com sucesso, funções como *While*, *For* e *If-Else*, preexistentes no programa, foram usadas.

While e *For* são funções de repetição, cujo objetivo de usá-las foi de gerar loops que produziram iterações. Critérios de tolerância foram escolhidos como

condições de parada. Estas funções foram necessárias tanto para a aproximação da raiz usando o método Newton-Raphson, como na geração de novos polinômios por meio das divisões sintéticas. No caso de poder executar afirmações verdadeiras ou falsas, foi utilizada a função *If-Else*, especialmente no método da bissecção.

Outras funções pré-programadas também foram de extrema importância para realizar a simulação de estabilidade.

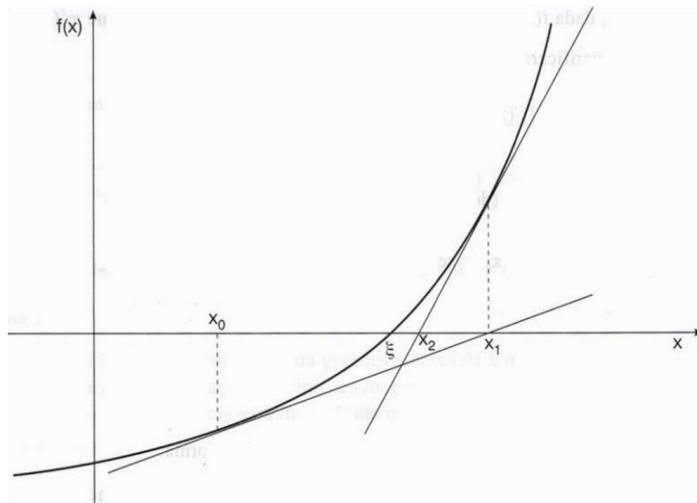
3.4.1 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON COM DIVISÕES SINTÉTICAS

O método de Newton-Raphson é a forma mais utilizada de localizar raízes de polinômios não-lineares. Nesse método, a estimativa das raízes se deve à aplicação da derivada da função, que é a reta tangente à curva em certo ponto. Emprega-se, então, a intersecção da derivada com o eixo cartesiano horizontal até se obter a maior aproximação com a raiz. Esse procedimento deve ser repetido para gerar iterações que são descritas genericamente na Equação 3.27, encontrada em Constantinides e Mostoufi (1999):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (3.27)$$

A Figura 3.4 representa como as iterações ocorrem. A estimativa inicial é x_0 , $f(x_0)$ é o valor da função em tal ponto, $f'(x_0)$ é a derivada em tal ponto e x_1 é a intersecção da derivada com o eixo x. Assim, a estimativa para a próxima iteração é gerada.

Figura 3.4 – Análise gráfica do Método Newton-Raphson



Fonte: RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R., 1997, p. 66

Esse método é empregado apenas em polinômios que possuem ao máximo um par de raízes complexas. No entanto, a vantagem de utilizá-lo é devido ao fato de o usuário não precisar entrar com uma raiz estimada. Esta estimativa que seria uma aproximação, pode ser obtida, segundo Constantinides e Mostoufi (1999), pelo truncamento dos termos de menor potência do polinômio. Truncamento é o procedimento que considera as casas decimais desprezíveis em relação ao valor inteiro.

Na Equação 3.28, de acordo com Constantinides e Mostoufi (1999), é considerado que as casas decimais são representadas pela soma dos termos da n -ésima e da $(n-1)$ -ésima potência. Portanto, os termos a partir da $(n-2)$ -ésima potência são truncados, o que torna a soma dos dois primeiros termos próximos de zero como mostrado na Equação 3.29. Assim se obtém a raiz inicial aproximada (x_0) na Equação 3.30.

$$f(x) = a_0 * x^n + a_1 * x^{n-1} + a_2 * x^{n-2} + \dots + a_n = 0 \quad (3.28)$$

$$a_0 * x^n + a_1 * x^{n-1} \approx 0 \quad (3.29)$$

$$x_0 \approx -\frac{a_1}{a_0} \quad (3.30)$$

Deste modo, a partir da estimativa inicial, iterações baseadas na Equação 3.27 são realizadas até a maior aproximação possível. É considerada uma

tolerância de aproximação até a sexta casa decimal ($\text{tol} = 10^{-6}$). Posto isso, a primeira raiz identificada é removida do polinômio de grau n através de divisões sintéticas. Desta forma, um polinômio de grau $n-1$ é gerado (CONSTANTINIDES; MOSTOUFI, 1999).

A seguir, encontra-se parte de um exemplo de comando executado no *MATLAB* para realizar divisões sintéticas em loop até encontrar todas as raízes reais possíveis de um polinômio:

```
% Cálculo dos coeficientes do novo polinômio de grau n-1 após divisão
sintética
for r = 2:k
b(r) = a(r) + b(r-1) * x1;
end
```

Onde:

- k – vetor decrescente em passo -1 que começa no grau n e termina em 3, que é o último grau passível de divisão sintética;
- r – vetor crescente em passo +1 que começa em 2 e termina em n ; indica a posição dos coeficientes no polinômio.
- $b(r)$ – coeficientes do polinômio de grau $n-1$ onde r é sua posição no vetor;
- $b(r-1)$ – coeficientes do polinômio de grau $n-1$ onde $r-1$ é sua posição no vetor;
- $a(r)$ – coeficientes do polinômio de grau n onde r é sua posição no vetor;
- $x1$ – raiz encontrada com o método de Newton-Raphson.

As divisões sintéticas são executadas até o polinômio atingir o grau 2. O polinômio quadrático final é, desta forma, resolvido com o teorema de Bháskara (3.31), que geralmente resulta em um par de raízes complexas conjugadas:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \alpha \pm \beta i \quad (3.31)$$

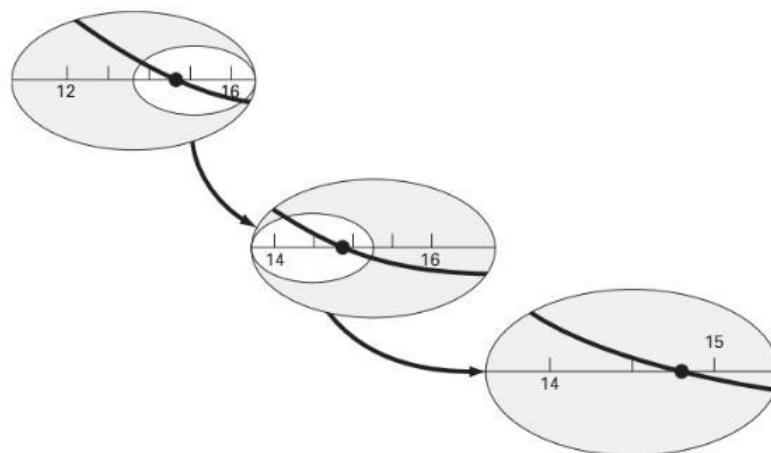
A programação para criar a função que executa o método de Newton-Raphson com divisões sintéticas, conforme Constantinides e Mostoufi (1999), se encontra no Apêndice A.

3.4.2 MÉTODO DA BISSECÇÃO

Conforme Chapra e Canale (2008), o método da bissecção, também denominado divisão do intervalo na metade, consiste em encontrar a raiz de uma função com base no fato desta se localizar em um intervalo onde o produto das funções dos extremos é negativo, o que indica uma mudança de sinal. O ponto médio desse intervalo é calculado e um novo intervalo é testado para a mudança de sinal com o ponto médio como novo extremo.

Ao observar a primeira iteração na Figura 3.5, é constatado que $f(12) * f(16) < 0$, portanto a raiz se encontra no intervalo entre 12 e 16 devido à mudança de sinal da função. O ponto médio 14 é calculado e $f(12) * f(14) > 0$, o que constata que a raiz não está nesse intervalo. Portanto, a raiz está entre 14 e 16, posto que $f(14) * f(16) < 0$. O ponto médio 15 é calculado, e assim por diante, até que o produto seja nulo. É confirmado, portanto, que o último ponto médio é a raiz da função (CHAPRA; CANALE, 2008).

Figura 3.5 – Descrição gráfica das três primeiras iterações para pesquisa de raízes pelo Método da Bissecção



Fonte: CHAPRA; CANALE, 2008; p. 102

3.4.2.1 Método de Bissecção Adaptado para o Caso Estudado

Por meio de linguagem de programação no *MATLAB*, a lógica do método da bissecção foi utilizada para encontrar o valor crítico do Kc.

Douglas (1972, apud CONSTANTINIDES e MOSTOUFI, 1999) propõe um modelo matemático para resolver o caso de um CSTR isotérmico controlado, cuja função transferência é conhecida e sua equação característica contém um Kc desconhecido que pode ser ajustado com a finalidade de gerar estabilidade ao sistema. A equação característica na sua forma canônica é formada por dois polinômios onde o de menor grau é multiplicado pelo ganho Kc.

Constantinides e Mostoufi (1999) propõem um algoritmo que, para ser rodado, o usuário deve entrar com os coeficientes do menor e do maior polinômio que constituem a equação característica, e uma faixa de pesquisa para o Kc. Uma condição para que o programa rode é que o valor crítico de Kc deve estar entre os limites inferior e superior escolhidos. Esse fato ocorre quando Kc1 (limite inferior) gera uma equação que confere estabilidade ao sistema e Kc2 (limite superior), instabilidade, o que prova que o ponto crítico se encontra dentro desse intervalo.

Para o programa retornar resultados quanto à aplicação do critério de estabilidade e determinar se o método da bissecção deve prosseguir entre os limites, foi criada a função binária “*stbl*”. A função é binária pois admite valor de 1 para quando Kc gera estabilidade (todas raízes com parte real negativa) e valor de 0 para quando Kc gera instabilidade (pelo menos uma raiz com parte real positiva). “*Stbl1*” e “*stbl2*” são funções auxiliadoras desse mecanismo. Ao considerar Kc1 e Kc2 iniciais, tem-se as proposições abaixo:

$$stbl = \begin{cases} 0, & \text{sistema instável} \\ 1, & \text{sistema estável} \end{cases} \quad (3.32)$$

$$f(Kc1) = stbl1 \text{ e } f(Kc2) = stbl2 \quad (3.33)$$

$$\text{Se } f(Kc1) = f(Kc2), stbl1 = stbl2, \text{ valor crítico não se encontra no intervalo} \\ (3.34)$$

$$\text{Se } f(Kc1) \neq f(Kc2), stbl1 \neq stbl2, \text{método continua e } Kc' = \frac{Kc1 + Kc2}{2} \quad (3.35)$$

$$\text{Se } f(Kc) = f(Kc1), stbl = stbl1, Kc'1 = Kc \text{ e } Kc'2 = Kc2, \text{portanto } Kc' = \frac{Kc + Kc2}{2} \quad (3.36)$$

$$\text{Se } f(Kc) = f(Kc2), stbl = stbl2, Kc'1 = Kc1 \text{ e } Kc'2 = Kc, \text{portanto } Kc' = \frac{Kc1 + Kc}{2} \quad (3.37)$$

O método encontra o valor final de Kc (ponto crítico) quando o critério de convergência proposto pelo usuário for satisfeito (CONSTANTINIDES; MOSTOUFI, 1999).

$$\Delta Kc = |Kc1 - Kc2| \quad (3.38)$$

A escolha certa da faixa de pesquisa é imprescindível para a viabilidade do método. Dependendo dos limites selecionados, o programa pode não rodar. No caso do trabalho acadêmico desenvolvido por Salvarani (2015) - que discutiu sobre o controle proporcional em CSTR's isotérmicos - o autor fez uso da programação encontrada em literatura sem nenhuma modificação.

Salvarani (2015) optou por um extremo inferior $Kc1 = 0$, condição de malha aberta, e um extremo superior $Kc2 = 100$, ao saber que o ponto crítico obtido analiticamente foi de 75,1584. As raízes para cada Kc inicial foram calculadas e constatou-se que $Kc1$ gerou raízes exclusivamente negativas e $Kc2$, raízes complexas conjugadas com parte real positiva (CONSTANTINIDES e MOSTOUFI, 1999). Portanto houve uma mudança de sinais nas raízes, o que representa a presença do valor crítico no intervalo. Posto isso, o mesmo intervalo foi bissecionado e $Kc = 50$ (ponto médio) admitido como novo extremo. $Kc1 = 50$ gerou todas suas raízes com parte real negativa, o que levou o programa a substituir $Kc1 = 0$ por $Kc1 = 50$ e bissecionar o intervalo entre 50 e 100 ($stbl1 = 1$ e $stbl2 = 0$). Esse procedimento foi repetido 19 vezes até o módulo da diferença entre os dois extremos atingir o critério de convergência de 10^{-3} , proposto em literatura.

Portanto, Salvarani (2015) obteve sucesso no cálculo do Kc crítico ao usar diretamente os comandos encontrados na literatura. Não foi o caso desta monografia, que demandou alguns ajustes a fim de viabilizar a execução do programa.

Os primeiros parâmetros testados para calcular os coeficientes de entrada da equação característica foram fornecidos por Constantinides e Mostoufi (1999) e o ganho crítico obtido analiticamente para esses parâmetros foi de 3,9179. O método de Routh para esse cálculo foi descrito por Carvalho (2014). A partir desses dados, foram geradas as raízes para Kc1 = 0 e Kc2 = 5, mas o programa para, sem produzir mais iterações. O que ocorreu foi que, para Kc1 = 0, as raízes reais foram -0,2, -0,2, -0,1 e $3,6 \times 10^{-12}$. Para o algoritmo, a última raiz citada é positiva (stbl1 = 0), assim como em Kc = 5 (stbl2 = 0), que gerou raízes -0,40341, -0,1131, $0,008255 + 0,2808i$ e $0,008255 - 0,2808i$. Logo, retornou que o valor crítico não se encontrava naquele intervalo. A afirmação é falsa, posto que o fato já tinha sido constatado com o método de Routh.

Existem alguns valores no *MATLAB* chamados “*floating-numbers*”, que não conseguem ser armazenados na forma binária. Isso pode ter sido uma das causas para que esse valor positivo infinitamente pequeno fosse gerado como raiz em Kc = 0 (MOLER, 1996). Portanto, foi aplicada a função *Round* no intuito de arredondar $3,6 \times 10^{-12}$ a zero. Mesmo ao eliminar o valor positivo, o zero também se tornou um empecilho, pois o algoritmo estava programado para retornar como estável somente Kc's que gerassem raízes com parte real negativa. Nesse caso, havia uma parte real nula.

Ao considerar a definição de erro apresentada na seção 2.2 e o tipo de processo proposto, como explanado na seção 2.2.4, houve a alternativa de optar por um Kc1 maior que 0, como 0,0001, com a justificativa de Kc ser positivo para o controle de ação reversa.

No entanto, foi decidido analisar a estabilidade usando como limite inferior de pesquisa a malha aberta (Kc1 = 0), como descrito em Constantinides e Mostoufi (1999). Constatou-se que a raiz zero não é um polo, conforme a seção 2.3.3. Quando Kc = 0, a função transferência assume esta configuração:

$$G(s) = \frac{250 s^3 + 100 s^2 + 10 s}{2500 s^4 + 1250 s^3 + 200 s^2 + 10 s} \quad (3.39)$$

Ao considerar que $s = 0$ é raiz do denominador, isto supõe que também seja polo da função transferência. Mas para que uma raiz seja polo, $G(s) \rightarrow \infty$, o que não ocorre. Ao substituir s por zero em toda função, tem-se uma indeterminação algébrica $G(s) = \frac{0}{0}$. Para resolvê-la, foi aplicada a regra de L'Hôpital, como proposto por Chen (1993), para resolver limites indeterminados:

$$G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{N(s)}{D(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{N'(s)}{D'(s)} = 1 \quad (3.40)$$

A convergência para o valor de 1 só comprovou que 0 não é um polo para a Equação 3.36. Desse modo, $Kc_1 = 0$ só apresentou polo negativo, logo o sistema em malha aberta é estável.

Tendo em vista que, na prática, a raiz zero da primeira iteração não tem efeito sobre a estabilidade, a estrutura de programação foi adaptada para que esse detalhe não afetasse a execução dos comandos. A parte real nula da raiz foi incluída como condição de estabilidade. Na prática, isso não é fato, como se pode conferir nos critérios de estabilidade descritos na seção 2.3.4. A inclusão dessa nova condição teve apenas a finalidade de viabilizar novas iterações.

O mesmo procedimento foi realizado para a equação característica definida na Equação 3.23, cujo resultado foi demonstrado no tópico 4 Resultados e Discussão.

Os comandos que executam as etapas dessa seção, adaptados de Constantinides e Mostoufi (1999), se encontram no Apêndice B.

3.4.3 SIMULAÇÃO PARA DIFERENTES VALORES DO GANHO PROPORCIONAL

Depois de identificar o valor crítico, esse serviu como parâmetro para escolher mais dois valores de Kc a serem simulados para a análise de estabilidade do sistema. Para a região de estabilidade, considerou-se $Kc = 3$ e para a região de instabilidade, $Kc = 10$, já que o Kc crítico obtido foi de 5,8426.

Ao atribuir esses valores à Equação 3.23, foram obtidas três FT's:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{d(s)} = \frac{237,12 s^3 + 95 s^2 + 9,5 s}{2252,64 s^4 + 1139,62 s^3 + 275,025 s^2 + 69,35 s + 6,3}, Kc = 3 \quad (3.41)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{d(s)} = \frac{237,12 s^3 + 95 s^2 + 9,5 s}{2252,64 s^4 + 1139,62 s^3 + 360,0898 s^2 + 126,0598 s + 12,2695}, Kc = 5,8426 \quad (3.42)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{d(s)} = \frac{237,12 s^3 + 95 s^2 + 9,5 s}{2252,64 s^4 + 1139,62 s^3 + 484,5 s^2 + 209 s + 21}, Kc = 10 \quad (3.43)$$

As simulações foram feitas para perturbações na entrada do tipo impulso e degrau unitários. Portanto, foram necessárias suas TL's, que podem ser encontradas na Tabela A-1 de Ogata (2011). Constatou-se que:

$$\text{Para o impulso unitário, } \mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \quad (3.44)$$

$$\text{Para o degrau unitário, } \mathcal{L}[1(t)] = 1/s \quad (3.45)$$

A fim de compreender melhor a álgebra por trás dessas transformadas, os cálculos se encontram em Smith e Corripio (2008). Deste modo, $Y(s) = G(s) * d(s)$, onde $d(s) = 1$ para a perturbação em impulso unitário na entrada e $d(s) = 1/s$, para o degrau unitário.

A expansão em frações parciais de $Y(s)$ foi feita com o auxílio da função *Residue* no MATLAB. *Residue* apresenta uma configuração específica que solicita a entrada do numerador e do denominador da função transferência a fim de ter como saída as raízes (“ p ”), os coeficientes das variáveis (“ C ”) e uma constante “ K ”, que pode ser nula ou não. $[C, p, K] = residue (num den)$; onde “ num ” é o vetor dos coeficientes do numerador da função transferência e “ den ”, do denominador.

A partir desses dados, foi possível calcular a transformada inversa de $Y(s)$ e se obteve o comportamento dinâmico da resposta no domínio do tempo $y(t)$.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

O procedimento mencionado na seção 3.4.2.1 foi realizado com os parâmetros admitidos para esta monografia. Entrou-se com os coeficientes que constituem a equação característica, a faixa de pesquisa para Kc de 0 a 10 e o método de pesquisa de raízes Newton-Raphson com divisões sintéticas.

O valor crítico foi encontrado quando o critério de convergência de 10^{-5} foi atingido, após 22 iterações. O algoritmo calculou 5,841932 para o maior valor de Kc que gera estabilidade e 5,841942 para o menor que gera instabilidade. Deste modo, o valor crítico está nesse intervalo-limite. O resultado gerado na *Command Window* é ilustrado na Figura 4.1:

Figura 4.1 – Resultado do algoritmo programado para pesquisar o valor crítico de Kc

```

coefficientes menor polinômio = [29.925 19.95 2.1];
coefficientes maior polinômio = [2252.64 1139.62 185.25 9.5 0];
Limite inferior da faixa de pesquisa= 0
Limite superior da faixa de pesquisa= 10
1) Newton-Raphson com divisão sintética
Entre com 1 para o Método para Encontrar Raízes de NR = 1

Kc = 0.000000
Roots = -0.20833 -0.19231 -0.10526      0
Kc = 10.000000
Roots = -0.40165 -0.13131 0.01353+0.4202i 0.01353-0.4202i
Kc = 5.000000
Roots = -0.36665 -0.13161 -0.003822+0.3108i -0.003822-0.3108i
Kc = 7.500000
Roots = -0.38699 -0.13141 0.006244+0.3707i 0.006244-0.3707i
Kc = 6.250000
Roots = -0.37777 -0.13149 0.001676+0.3425i 0.001676-0.3425i
Kc = 5.625000
Roots = -0.37249 -0.13154 -0.0009349+0.3271i -0.0009349-0.3271i
Kc = 5.937500
Roots = -0.37519 -0.13151 0.0004819+0.3349i 0.0004819-0.3349i
Kc = 5.781250
Roots = -0.37386 -0.13153 -0.0002583+0.3311i -0.0002583-0.3311i
Kc = 5.859375
Roots = -0.37453 -0.13152 7.377e-05+0.3331i 7.377e-05-0.3331i
Kc = 5.820312
Roots = -0.3742 -0.13152 -9.177e-05+0.3321i -9.177e-05-0.3321i
Kc = 5.839844
Roots = -0.37436 -0.13152 -8.871e-06+0.3325i -8.871e-06-0.3325i
Kc = 5.849609
Roots = -0.37445 -0.13152 3.248e-05+0.3328i 3.248e-05-0.3328i
Kc = 5.844727
Roots = -0.37441 -0.13152 1.181e-05+0.3326i 1.181e-05-0.3326i
Kc = 5.842285
Roots = -0.37439 -0.13152 1.473e-06+0.3326i 1.473e-06-0.3326i
Kc = 5.841064
Roots = -0.37437 -0.13152 -3.698e-06+0.3326i -3.698e-06-0.3326i
Kc = 5.841675
Roots = -0.37438 -0.13152 -1.112e-06+0.3326i -1.112e-06-0.3326i
Kc = 5.841980
Roots = -0.37438 -0.13152 1.806e-07+0.3326i 1.806e-07-0.3326i
Kc = 5.841827
Roots = -0.37438 -0.13152 -4.658e-07+0.3326i -4.658e-07-0.3326i
Kc = 5.841984
Roots = -0.37438 -0.13152 -1.426e-07+0.3326i -1.426e-07-0.3326i
Kc = 5.841942
Roots = -0.37438 -0.13152 1.904e-08+0.3326i 1.904e-08-0.3326i
Kc = 5.841923
Roots = -0.37438 -0.13152 -6.176e-08+0.3326i -6.176e-08-0.3326i
Kc = 5.841932
Roots = -0.37438 -0.13152 -2.136e-08+0.3326i -2.136e-08-0.3326i

O valor crítico de Kc se encontra no intervalo entre
Kc1= 5.841932 e Kc2 = 5.841942

```

Fonte: O próprio autor

Em sequência, foram realizadas as simulações para os três casos das Equações 3.41, 3.42 e 3.43.

Para a perturbação degrau, como $d(s) = 1/s$, um novo fator foi gerado no denominador, pois foi adicionada uma raiz igual a zero. Portanto o vetor do denominador ganhou uma posição a mais, que foi preenchida por um zero. Para a perturbação impulso, como $d(s) = 1$, essa condição algébrica não foi considerada, logo não houve alterações no vetor do denominador.

As Tabelas 4.1 e 4.2 representam as saídas da função *Residue* para cada Kc sob perturbações impulso e degrau:

Tabela 4.1 - Saídas da função *Residue* para diferentes Kc sob perturbação impulso

Impulso			
Kc	Coeficientes	Raízes	Constante
3	0,0205	-0,3422	
	0,0444 + 0,0065i	-0,0158 + 0,2483i	
	0,0444 - 0,0065i	-0,0158 - 0,2483i	K=0
	-0,0040	-0,1320	
5,8426	0,0196	-0,3744	
	0,0439 + 0,0061i	0 + 0,3326i	
	0,0439 - 0,0061i	0 - 0,3326i	K=0
	-0,0021	-0,1315	
10	0,0442 + 0,0061i	0,0135 + 0,4202i	
	0,0442 - 0,0061i	0,0135 - 0,4202i	
	0,0181	-0,4017	K=0
	-0,0012	-0,1313	

Fonte: O próprio autor

Tabela 4.2 - Saídas da função *Residue* para diferentes Kc sob perturbação degrau

Degrau			
Kc	Coeficientes	Raízes	Constante
3	-0,0598	-0,3422	
	0,0146 – 0,1799i	-0,0158 + 0,2483i	
	0,0146 + 0,1799i	-0,0158 – 0,2483i	K=0
	0,0307	-0,1320	
	0	0	
5,8426	-0,0523	-0,3744	
	0,0182 - 0,1320i	0 + 0,3326i	
	0,0182 + 0,1320i	0 – 0,3326i	K=0
	0,0158	-0,1315	
	0	0	
10	0,0179 – 0,1045i	0,0135 + 0,4202i	
	0,0179 + 0,1045i	0,0135 – 0,4202i	
	-0,0452	-0,4017	K=0
	0,0093	-0,1313	
	0	0	

Fonte: O próprio autor

A partir dos dados oriundos das Tabelas 4.1 e 4.2, frações parciais foram estruturadas para o cálculo das TLI's com o fim de analisar o comportamento dinâmico da resposta no domínio do tempo.

Os comandos criados para gerar os dados das Tabelas 4.1 e 4.2 se encontram no Apêndice C.

As equações a seguir representam as respostas do sistema após a transformada inversa em $Y(s)$:

- $K_c = 3$, perturbação impulso (1) e degrau (2):

$$y_1(t) = 0,0205e^{-0,3422t} - 0,004e^{-0,1320t} + 2e^{-0,0158t}[0,0444 \cos(0,2483t) - 0,0065 \operatorname{sen}(0,2483t)] \quad (4.1)$$

$$y_2(t) = -0,0598e^{-0,3422t} + 0,0307e^{-0,1320t} + 2e^{-0,0158t}[0,0146 \cos(0,2483t) + 0,1799 \operatorname{sen}(0,2483t)] \quad (4.2)$$

- $K_c = 5,8426$ (crítico), perturbação impulso (3) e degrau (4):

$$y_3(t) = 0,0196e^{-0,3744t} - 0,0021e^{-0,1315t} + 2[0,0439 \cos(0,3326t) - 0,0061 \operatorname{sen}(0,3326t)] \quad (4.3)$$

$$y_4(t) = -0,0523e^{-0,3744t} + 0,0158e^{-0,1315t} + 2[0,0182 \cos(0,3326t) + 0,1320 \operatorname{sen}(0,3326t)] \quad (4.4)$$

- $K_c = 10$, perturbação impulso (5) e degrau (6):

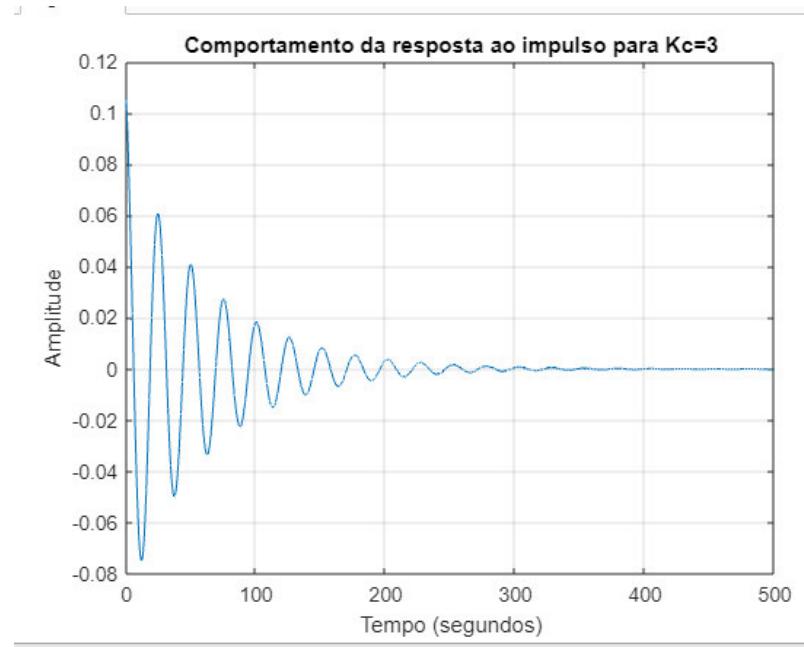
$$y_5(t) = 0,0181e^{-0,4017t} - 0,012e^{-0,1313t} + 2e^{0,0135t}[0,0442 \cos(0,4202t) - 0,0061 \operatorname{sen}(0,4202t)] \quad (4.5)$$

$$y_6(t) = -0,0452e^{-0,4017t} + 0,0093e^{-0,1313t} + 2e^{0,0135t}[0,0179 \cos(0,4202t) + 0,1045 \operatorname{sen}(0,4202t)] \quad (4.6)$$

A partir das equações acima, pôde-se plotar os gráficos que foram utilizados para simular e analisar a estabilidade do sistema. Os comandos criados para gerar esses gráficos estão descritos no Apêndice D.

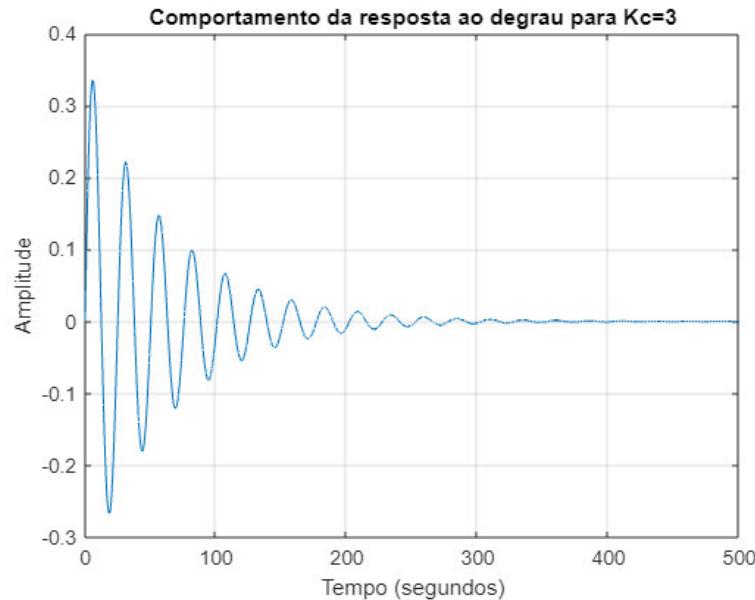
As Figuras 4.2 e 4.3 representam o comportamento dinâmico da resposta para as Equações 4.1 e 4.2, respectivamente:

Figura 4.2 - Gráfico da resposta ao impulso para $K_c = 3$



Fonte: O próprio autor

Figura 4.3 - Gráfico da resposta ao degrau para $K_c = 3$



Fonte: O próprio autor

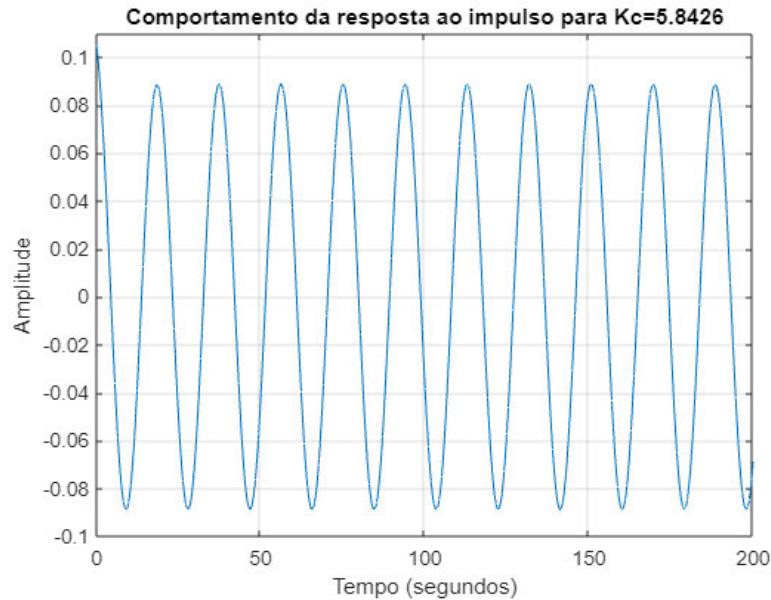
Com o objetivo de interpretar e compreender a condição do sistema em determinadas circunstâncias, foi necessário conceituar a amplitude observada no eixo y dos gráficos acima. Tendo em vista que $y(t)$, na realidade, não é a variável controlada, e sim a variável-desvio dessa, entende-se como módulo da amplitude

o afastamento da variável controlada em relação ao seu valor no regime estacionário (*set point*). Portanto, quando a amplitude for zero, significa que o desvio é nulo e a variável se encontra em estado estacionário no valor de *set point*. Em contrapartida, quando a amplitude for positiva ou negativa (módulo diferente de zero), ocorreu o afastamento da variável em relação ao *set point*, o que implica em um desvio.

Os gráficos acima mostram que, com o ganho proporcional ajustado em $K_c = 3$, as respostas para ambas perturbações tiveram comportamento oscilatório e essas oscilações foram amortecidas ao longo do tempo até a resposta convergir ao estado estacionário e ter o desvio eliminado. Isso se deu devido aos polos reais negativos e complexos com parte real negativa. O sistema é estável.

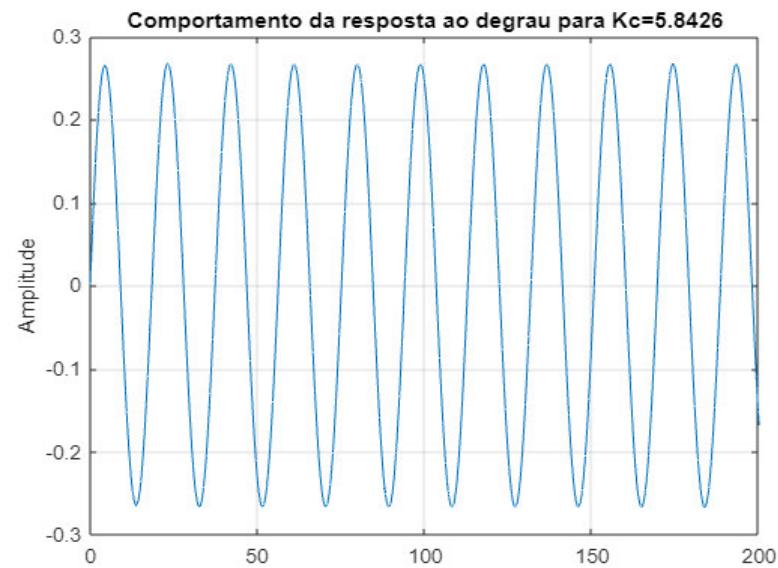
Nos casos ilustrados nas Figuras 4.4 e 4.5, com o K_c ajustado no ponto crítico, foi observado como as respostas para ambas perturbações tiveram comportamento oscilatório com amplitude constante ao longo do tempo. O desvio permaneceu e a variável controlada não retornou ao *set point*. Isso se deu devido aos polos imaginários puros obtidos juntamente com polos reais negativos. O sistema é criticamente estável.

Figura 4.4 - Gráfico da resposta ao impulso para K_c crítico 5,8426



Fonte: O próprio autor

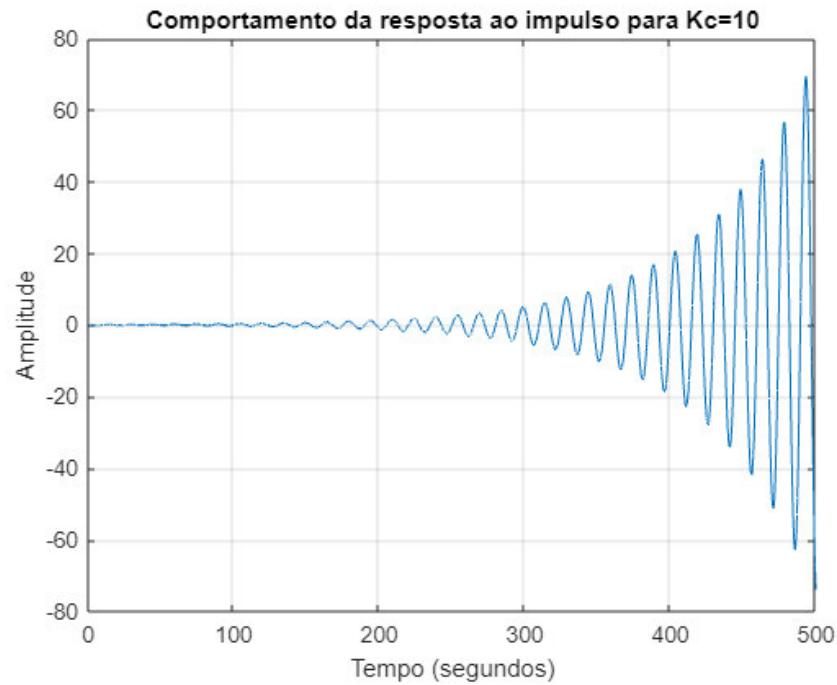
Figura 4.5 – Gráfico da resposta ao degrau para K_c crítico 5,8426



Fonte: O próprio autor

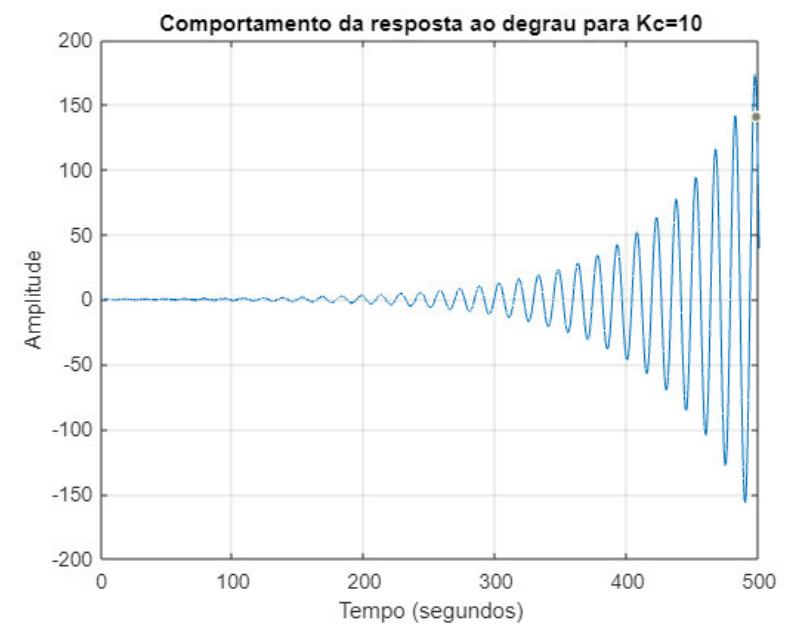
Nos gráficos das Figuras 4.6 e 4.7, foi observado que, com o ganho proporcional ajustado em $K_c = 10$, as respostas para ambas perturbações tiveram comportamento oscilatório com amplitude crescente ao longo do tempo, o que torna o desvio impossível de ser eliminado. Isso se deu devido aos polos complexos conjugados que apresentaram parte real positiva. O sistema é instável.

Figura 4.6 - Gráfico da resposta ao impulso para $K_c = 10$



Fonte: O próprio autor

Figura 4.7 - Gráfico da resposta ao degrau



Fonte: O próprio autor

5 CONCLUSÃO

Esse trabalho foi relevante por demonstrar dois meios de analisar a estabilidade de um sistema de controle: por métodos numéricos e pelo método analítico de Routh.

No método analítico, a análise foi feita pela localização das raízes sem o conhecimento de seus valores. A sua localização foi conhecida por meio de testes algébricos. A importância do seu emprego se deve ao fato de não exigir a determinação das raízes para análise.

Quanto aos métodos numéricos, o *MATLAB* se mostrou uma ferramenta útil por executá-los por meio de um algoritmo. A análise através desse algoritmo foi realizada pelo cálculo das raízes da equação característica e a avaliação quanto à sua posição no plano complexo. O software também proporcionou a geração de gráficos que, visualizados, pôde-se concluir em qual condição de estabilidade simulada o controle PID teve melhor desempenho.

No processo proposto, como o controle PID tem a finalidade de retornar a variável controlada ao valor de *set point*, o ajuste do ganho proporcional que mostrou um melhor desempenho dentre as três opções simuladas foi o $K_c = 3$, onde o sistema é estável. Portanto, o controle nesse ajuste foi mais eficaz.

Já, para os outros ajustes, o controle não cumpriu sua finalidade. O ajuste no ganho crítico 5,8426 pode ser plausível para outros exemplos, mas no caso estudado, não foi aceito, pois o desvio em relação ao *set point* permaneceu constante ao longo do tempo. Quanto ao ajuste em $K_c = 10$, esse foi totalmente descartado pelo fato de o sistema ser instável, o que torna o controle ineficaz.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS⁵

- CARVALHO, R. V. D. **Análise de estabilidade do processo controlado de aquecimento de um líquido em um tanque com agitação: estudo de caso.** Monografia (Trabalho de conclusão de curso) – Escola de Engenharia de Lorena, Universidade de São Paulo, Lorena, 2014.
- CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. **Método Numérico para Engenharia.** 5ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2008. 785p.
- CHEN, T. C. **Analog and digital Control System Design: Transfer-function, State-space and Algebraic Methods.** New York: Saunders College Electrical Engineering, 1993. 600p.
- CONSTANTINIDES, A.; MOSTOUFI, N. **Numerical methods for Chemical Engineers with MATLAB Aplications.** New Jersey: Prentice Hall, 1999. 559 p.
- COUGHANOWR, D. R.; KOPPEL; L. B. **Análise e controle de processos.** Rio de Janeiro, Guanabara Dois, 1978. 474p.
- DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA DA PUC-RIO. **Combinações de funções no tempo contínuo.** Disponível em: < <http://www.maxwell.vrac.puc-rio/29821/introducao.html> >. Acesso em 15 jun. 2021.
- DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA QUÍMICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS. **Estabilidade de Sistemas de Controle de Realimentação.** Disponível em: < <http://www.professores.deq.ufscar.br/ronaldo/cp1/pdf/aula12.pdf> >. Acesso em 28 mai. 2018.
- DOUGLAS, J. M. **Process Dynamics and Control,** vol. 2, Prentice Hall, Englewood, Cliffs, New Jersey, 1972.
- KWONG, W. H. **Introdução ao controle de processos químicos com MATLAB.** São Carlos: EdUFSCar, v. 2, 2002. 212p.
- MATHWORKS, **MATLAB.** Disponível em: <www.mathworks.com/products/matlab/>. Acesso em 07 jun. 2021.
- MOLER, C. “**Floating points**”. **MATLAB News and notes.** Fall, 1996. Disponível em <[Floating-Point Numbers - MATLAB & Simulink \(mathworks.com\)](http://www.mathworks.com/Floating-Point Numbers - MATLAB & Simulink)>. Acesso em: 29 jun. 2021.
- OGATA, K. **Engenharia de controle moderno.** 5.ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011. 809p.
- RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais.** 2.ed. São Paulo: Makron Books do Brasil, 1997. 406 p.

⁵ De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6023.

SALVARANI, R. D. O. **Análise da estabilidade do controle proporcional de um processo químico.** Monografia (Trabalho de conclusão de curso) – Escola de Engenharia de Lorena, Universidade de São Paulo, Lorena, 2015.

SMITH, C. S.; CORRIPIO, A. B. **Princípios e Prática do Controle Automático de Processo.** 3.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008. 505p.

STEPHANOPOULOS, G. **Chemical process control: An introduction to theory and practice.** New Jersey: Prentice Hall, 1984. 696p.

APÊNDICE A – Programação para criar a função NRsdivision que executa o método de Newton-Raphson com divisões sintéticas

```

function x = NRsdivision(c,tol) % função de Newton-Raphson criada
if nargin < 2 || isempty(tol) % isenta o usuário de entrar com uma tolerância
tol = 10^-6;
end
if tol == 0
tol = 10^-6; % convergência máxima para encontrar a raiz inicial
end

n = length(c)-1; % grau do polinômio a ser decomposto
a = c; % o vetor dos coeficientes do polinômio de grau n

for k = n:-1:3 % polinômios são passíveis de divisão sintética até n=3
x0= -a(2)/a(1); % estimativa inicial considerando truncamento das menores
potências
x1 = x0 + 0.1; % atribui valor inicial a raiz
iter = 0; % contagem das iterações
maxiter = 100; % máxima iteração possível

% Resolução pelo Método de Newton Raphson
while abs(x0 - x1) > tol && iter < maxiter % condições de parada
iter = iter + 1;
x0 = x1;
fnk = polyval(a,x0); % valor da função para a estimativa inicial
fnkp = polyval(polyder(a),x0); % valor da derivada da função para a estimativa
inicial
if fnkp ~= 0
x1 = x0 - fnk/fnkp; % aproximação seguinte
else
x1 = x0 + 0.01; % valor alternativo que retorna, caso a derivada seja nula
end
end
x(n-k+1) = x1; % primeira raíz real obtida por divisão sintética
% Cálculo dos coeficientes do polinômio de grau n-1 a partir da remoção
% de x1
b(1) = a(1);
for r = 2:k
b(r) = a(r) + b(r-1)*x1;
end
if iter == maxiter
disp ('Aviso: Maior Iteração Atingida!')
end

clear a
a = b;
clear b
end
% cálculo das raízes da função quadrática final, geralmente pares conjugados
complexos
delta = a(2)^2 - 4*a(1)*a(3);
x(n-1)= (-a(2) - sqrt(delta))/(2*(a(1)));
x(n)= (-a(2) + sqrt(delta))/(2*(a(1)));
x=x'; % expõe as raízes na horizontal

```

APÊNDICE B – Programação para pesquisa do ponto crítico pelo Método da Bissecção

```

clear
clc
% Entrada dos coeficientes da equação característica
num = input ('coef. menor polinomio = ');
denom = input('coef. maior polinomio = ');
disp('')
% Entrada dos limites de pesquisa para Kc
Kc1 = input('Limite inferior da faixa de pesquisa= ');
Kc2 = input('Limite superior da faixa de pesquisa= ');
disp('')
disp(' 1) Newton-Raphson com divisão sintética')
method = input('Entre com 1 para o Método para Encontrar Raízes de NR = ');

iter = 0;
n1= length(num); % comprimento do vetor dos coef. menor polinômio
n2= length(denom); % comprimento do vetor dos coef. maior polinômio
c(1:n2-n1) = denom(1:n2-n1);

% Loop para encontrar Kc crítico
while abs(Kc1 - Kc2) > 10^-5 % critério de convergência
    iter = iter +1;
    if iter == 1 % primeira iteração
        Kc = Kc1; % Limite inferior
    elseif iter == 2 % segunda iteração
        Kc = Kc2; % Limite superior
    else
        Kc = (Kc1 + Kc2)/2; % Aproximação seguinte (NOVO Kc)
    end

    % Cálculo dos coef. da equação na forma canônica
    for m= n2-n1+1 : n2
        c(m)= denom(m) + Kc*num(m-n2+n1);
    end

    % Encontrar Raízes
    switch method % insere o método a ser utilizado
    case 1 % Newton Raphson com divisões sintéticas
        root = NRsdivision(c);
    case 2 % Método do Autovalor
        root = roots(c);
    end

    fprintf('\n Kc = %8.6f\n Roots = ',Kc) % saída dos valores de Kc
    for k = 1:length(root)
        if isreal(root(k)) % caso as raízes sejam reais
            if root(k) > 0 && root(k) < 1e-6 % arredondamento da raiz infinitamente pequena a 0
                % no caso da malha aberta (Kc=0) a fim de viabilizar a rodagem dos códigos
                root(k) = round(root(k));
            else
                root(k) = root(k);
            end
        end
    end
    realpart = real(root); % parte real das raízes
end

```

```

imagpart = imag(root); % parte imaginária das raizes

fprintf('%7.5g ',(root(k))) % saída das raizes calculadas para cada Kc
else
fprintf('%6.4g',realpart(k))
if imagpart(k) >= 0
fprintf('+%5.4gi ',imagpart(k))
else
fprintf('-%5.4gi ',abs(imagpart(k)))
end
end
end
disp(' ')
% Condição de Estabilidade do Sistema que Determina Quando o Programa Deve Cessar
stbl=0; % função binária de reconhecimento da estabilidade
for m = 1: length(root)
if realpart(m)<= 0 % caso a parte real seja negativa; a condição de ser nula
% parte do fato que o programa se inicia com uma condição de malha aberta e a
raiz=0
% não é polo
stbl = 1; % caso a afirmação seja verdadeira, sistema estável
else % caso a afirmação seja falsa
stbl = 0; %sistema instável
break;
end
end

if iter == 1
stbl1 = stbl; % valor de stbl para o Kc1 inicial
elseif iter == 2
stbl2 = stbl; % valor de stbl para Kc2 inicial
if stbl1 == stbl2 % caso os valores sejam iguais
error('Valor critico esta fora do intervalo escolhido.');?>
end
else
if stbl == stbl1 % caso o stbl de Kc1 seja igual ao do novo Kc
Kc1 = Kc; % o novo Kc se torna o novo limite inferior
else % caso o stbl de Kc2 seja igual ao novo Kc
Kc2 = Kc; % o novo Kc se torna o novo limite superior
end
end
end
% saída do valor crítico de Kc, encontrado ao atingir a convergência máxima
fprintf('\n O valor crítico de Kc')
fprintf('\n se encontra no intervalo entre')
fprintf('\n Kc1= %8.6f e Kc2 = %8.6f', Kc1, Kc2)

```

APÊNDICE C – Expansão em frações parciais com a função *Residue* para diferentes valores de Kc sob perturbação impulso e degrau

```
% Expansão em frações parciais para o impulso
num=[237.12 95 9.5 0];
Kc=input('Entre com 3 valores de Kc:');
for r=1:3
den=[2252.64 1139.62 29.925*Kc(r)+185.25 19.95*Kc(r)+9.5 2.1*Kc(r)];
printsys(num,den,'s')
[C,p,K]=residue(num,den)
end

% Expansão em frações parciais para o degrau
num=[237.12 95 9.5 0];
Kc=input('Entre com 3 valores de Kc:');
for r=1:3
den=[2252.64 1139.62 29.925*Kc(r)+185.25 19.95*Kc(r)+9.5 2.1*Kc(r) 0];
printsys(num,den,'s')
[C,p,K]=residue(num,den)
end
```

APÊNDICE D – Programação para geração de gráficos do comportamento dinâmico da resposta para diferentes valores de Kc sob perturbações impulso e degrau

```
% Gráfico da resposta para Kc=3, perturbação impulso
t=0:0.001:500;
a=0.0205*exp(-0.3422*t);
b=-0.004*exp(-0.1320*t);
c=((2*exp(-0.0158*t)).*(0.0444*cos(0.2483*t)-0.0065*sin(0.2483*t)));
y1=a+b+c;
plot(t,y1)
grid on
xlabel('Tempo (segundos)')
ylabel('Amplitude')
title('Comportamento da resposta ao impulso para Kc=3')

% Gráfico da resposta para Kc=3, perturbação degrau
t=0:0.001:500;
a=-0.0598*exp(-0.3422*t);
b=0.0307*exp(-0.1320*t);
c=((2*exp(-0.0158*t)).*(0.0146*cos(0.2483*t)+0.1799*sin(0.2483*t)));
y2=a+b+c;
plot(t,y2)
grid on
xlabel('Tempo (segundos)')
ylabel('Amplitude')
title('Comportamento da resposta ao degrau para Kc=3')

% Gráfico da resposta para Kc=5.8426 (crítico), perturbação impulso
t=0:0.001:500;
a=0.0196*exp(-0.3744*t);
b=-0.0021*exp(-0.1315*t);
c=2*(0.0439*cos(0.3326*t)-0.0061*sin(0.3326*t));
y3=a+b+c;
plot(t,y3)
grid on
xlabel('Tempo (segundos)')
ylabel('Amplitude')
title('Comportamento da resposta ao impulso para Kc=5.8426')

% Gráfico da resposta para Kc=5.8426 (crítico), perturbação degrau
t=0:0.001:500;
a=-0.0523*exp(-0.3744*t);
b=0.0158*exp(-0.1315*t);
c=2*(0.0182*cos(0.3326*t)+0.1320*sin(0.3326*t));
y4=a+b+c;
plot(t,y4)
grid on
xlabel('Tempo (segundos)')
ylabel('Amplitude')
title('Comportamento da resposta ao degrau para Kc=5.8426')

% Gráfico da resposta para Kc=10, perturbação impulso
t=0:0.001:500;
a=0.0181*exp(-0.4017*t);
b=-0.012*exp(-0.1313*t);
```

```
c=((2*exp(0.0135*t)).*(0.0442*cos(0.4202*t)-0.0061*sin(0.4202*t)));
y5=a+b+c;
plot(t,y5)
grid on
xlabel('Tempo (segundos)')
ylabel('Amplitude')
title('Comportamento da resposta ao impulso para Kc=10')

% Gráfico da resposta para Kc=10, perturbação degrau
t=0:0.001:500;
a=-0.0452*exp(-0.4017*t);
b=0.0093*exp(-0.1313*t);
c=((2*exp(0.0135*t)).*(0.0179*cos(0.4202*t)+0.1045*sin(0.4202*t)));
y6=a+b+c;
plot(t,y6)
grid on
xlabel('Tempo (segundos)')
ylabel('Amplitude')
title('Comportamento da resposta ao degrau para Kc=10')
```